

Logarithmen ohne Hilfsmittel

Robert Geretschläger

Graz, am 9.2.2023

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Welche Hilfsmittel gibt es?

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Welche Hilfsmittel gibt es?

Computerprogramme

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

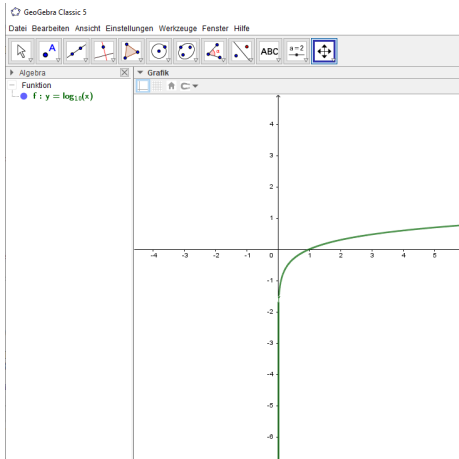
Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Welche Hilfsmittel gibt es?

Computerprogramme



Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Taschenrechner

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Taschenrechner



Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Old School: Rechenschieber und Logarithmentafeln

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

gewohnte Hilfsmittel

- ▶ Computerprogramme
- ▶ Taschenrechner
- ▶ Rechenschieber
- ▶ Logarithmentafeln

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Logarithmus mittels Intervallschachtelung

Definition:

$$a^n = b \iff n = \log_a b$$

Ziel: $n = \log_3 7$ auf vier Kommastellen genau berechnen, also $3^n \approx 7$.

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Logarithmus mittels Intervallschachtelung

Definition:

$$a^n = b \iff n = \log_a b$$

Ziel: $n = \log_3 7$ auf vier Kommastellen genau berechnen, also $3^n \approx 7$.

$$3^1 = 3 < 7 < 9 = 3^2 \Rightarrow 1 < \log_3 7 < 2$$

und somit

$$n = \log_3 7 = 1, \dots$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Logarithmus mittels Intervallschachtelung

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Definition:

$$a^n = b \iff n = \log_a b$$

Ziel: $n = \log_3 7$ auf vier Kommastellen genau berechnen, also $3^n \approx 7$.

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

$$3^1 = 3 < 7 < 9 = 3^2 \Rightarrow 1 < \log_3 7 < 2$$

und somit

$$n = \log_3 7 = 1, \dots$$

nächster Schritt: $3^{\frac{3}{2}} \approx 5,2 \Rightarrow$

$$3^{\frac{3}{2}} \approx 5,2 < 7 < 9 = 3^2 \iff \frac{3}{2} < \log_3 7 < 2 = \frac{4}{2}.$$

Logarithmus mittels Intervallschachtelung

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Hoppla. Schritt zurück!
Woher wissen wir, dass $3^{\frac{3}{2}} \approx 5,2$ gilt?

Einschub: direkte Berechnung von Quadratwurzeln

Wie geht das?

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Einschub: direkte Berechnung von Quadratwurzeln

Wie geht das?

$$(10a + b)^2 = 100 \cdot a^2 + 2 \cdot 10 \cdot a \cdot b + b^2$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

zurück zu $n = \log_3 7$

Es gilt $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ und $3^{\frac{7}{4}} = \sqrt{3^{\frac{7}{2}}} = \sqrt{\sqrt{3^7}} \approx 6,84$

und somit

$$3^{\frac{7}{4}} \approx 6,84 < 7 < 9 = 3^2 \iff \frac{7}{4} < \log_3 7 < 2 = \frac{8}{4}.$$

zurück zu $n = \log_3 7$

Es gilt $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} = 2$ und $3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7} = \sqrt{\sqrt{3^7}} \approx 6,84$

und somit

$$3^{\frac{7}{4}} \approx 6,84 < 7 < 9 = 3^2 \iff \frac{7}{4} < \log_3 7 < 2 = \frac{8}{4}.$$

Es gilt $\frac{7}{4} = \frac{14}{8} < \frac{15}{8} < \frac{16}{8} = 2$ und $3^{\frac{15}{8}} \approx 7,84$, und somit

$$3^{\frac{7}{4}} \approx 6,84 < 7 < 7,84 \approx 3^{\frac{15}{8}} \iff \frac{7}{4} < \log_3 7 < 2 = \frac{15}{8}.$$

zurück zu $n = \log_3 7$

Es gilt $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} = 2$ und $3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7} = \sqrt{\sqrt{3^7}} \approx 6,84$

und somit

$$3^{\frac{7}{4}} \approx 6,84 < 7 < 9 = 3^2 \iff \frac{7}{4} < \log_3 7 < 2 = \frac{8}{4}.$$

Es gilt $\frac{7}{4} = \frac{14}{8} < \frac{15}{8} < \frac{16}{8} = 2$ und $3^{\frac{15}{8}} \approx 7,84$, und somit

$$3^{\frac{7}{4}} \approx 6,84 < 7 < 7,84 \approx 3^{\frac{15}{8}} \iff \frac{7}{4} < \log_3 7 < 2 = \frac{15}{8}.$$

Wie geht's weiter?

zurück zu $n = \log_3 7$

$$3^{\frac{29}{16}} \approx 7,32 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{29}{16}.$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

zurück zu $n = \log_3 7$

$$3^{\frac{29}{16}} \approx 7,32 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{29}{16}.$$

$$3^{\frac{57}{32}} \approx 7,07 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

zurück zu $n = \log_3 7$

$$3^{\frac{29}{16}} \approx 7,32 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{29}{16}.$$

$$3^{\frac{57}{32}} \approx 7,07 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{113}{64}} \approx 6,96 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

zurück zu $n = \log_3 7$

$$3^{\frac{29}{16}} \approx 7,32 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{29}{16}.$$

$$3^{\frac{57}{32}} \approx 7,07 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{113}{64}} \approx 6,96 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{227}{128}} \approx 7,01 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{227}{128}, \dots$$

zurück zu $n = \log_3 7$

$$3^{\frac{29}{16}} \approx 7,32 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{29}{16}.$$

$$3^{\frac{57}{32}} \approx 7,07 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{113}{64}} \approx 6,96 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{227}{128}} \approx 7,01 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{227}{128}, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{113}{64} = 1,765625 < \log_3 7 < 1,7734375 = \frac{227}{128}$$

zurück zu $n = \log_3 7$

$$3^{\frac{29}{16}} \approx 7,32 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{29}{16}.$$

$$3^{\frac{57}{32}} \approx 7,07 \Rightarrow \frac{7}{4} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{113}{64}} \approx 6,96 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{57}{32}.$$

$$3^{\frac{227}{128}} \approx 7,01 \Rightarrow \frac{113}{64} < \log_3 7 < \frac{227}{128}, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{113}{64} = 1,765625 < \log_3 7 < 1,7734375 = \frac{227}{128}$$

$$\Rightarrow \log_3 7 = 1,76\dots \quad \text{oder} \quad \log_3 7 = 1,77\dots$$

Geht das ohne Quadratwurzeln?

Ja.

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Geht das ohne Quadratwurzeln?

Ja.

$$\frac{7}{4} < \log_3 7 \iff 3^7 < 7^4 \iff 2187 < 2401$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Geht das ohne Quadratwurzeln?

Ja.

$$\frac{7}{4} < \log_3 7 \iff 3^7 < 7^4 \iff 2187 < 2401$$

$$\log_3 7 < \frac{227}{128} \iff 7^{128} < 3^{227}$$

nett, aber

$$7^{128} \approx 1,4878 \cdot 10^{108} \quad \text{und} \quad 3^{227} \approx 2,0255 \cdot 10^{108}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Intervallschachtelung ohne Riesenpotenzen

$$3^{\frac{7}{4}} = 3^{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Intervallschachtelung ohne Riesenpotenzen

$$3^{\frac{7}{4}} = 3^{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

$$3^{\frac{15}{8}} = 3^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\right)} = 3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Intervallschachtelung ohne Riesenpotenzen

$$3^{\frac{7}{4}} = 3^{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

$$3^{\frac{15}{8}} = 3^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\right)} = 3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}}$$

$$3^{\frac{29}{16}} = 3^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{16}\right)} = 3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{16}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Intervallschachtelung ohne Riesenpotenzen

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

$$3^{\frac{7}{4}} = 3^{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

$$3^{\frac{15}{8}} = 3^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\right)} = 3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}}$$

$$3^{\frac{29}{16}} = 3^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{16}\right)} = 3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{16}}$$

$$3^{\frac{57}{32}} = 3^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{32}\right)} = 3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{32}}$$

USW.

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

feste Basis ist praktisch: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

feste Basis ist praktisch: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Leonhard Euler (1707-1783)

Introductio in analysin infinitorum (1748)



Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

feste Basis ist praktisch: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$



Leonhard Euler (1707-1783)

Introductio in analysin infinitorum (1748)

$\log_{10} x =: \lg x$: Tabelle mit Basis 10 unter Benutzung von

$$\lg \sqrt{xy} = \lg(xy)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\lg x + \lg y).$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$\lg 5 = ?$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$\lg 5 = ?$

$$\lg 1 < \lg 5 < \lg 10 \iff 0 < \lg 5 < 1$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$\lg 5 = ?$

$$\lg 1 < \lg 5 < \lg 10 \iff 0 < \lg 5 < 1$$

$$\lg \sqrt{1 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 1 + \lg 10) = 0,5$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$\lg 5 = ?$

$$\lg 1 < \lg 5 < \lg 10 \iff 0 < \lg 5 < 1$$

$$\lg \sqrt{1 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 1 + \lg 10) = 0,5$$

$$\sqrt{10} \approx 3,16228 \Rightarrow \lg 3,16228 \approx 0,5$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$\lg 5 = ?$

$$\lg 1 < \lg 5 < \lg 10 \iff 0 < \lg 5 < 1$$

$$\lg \sqrt{1 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 1 + \lg 10) = 0,5$$

$$\sqrt{10} \approx 3,16228 \Rightarrow \lg 3,16228 \approx 0,5$$

$$\lg 3,16228 < \lg 5 < \lg 10 \iff 0,5 < \lg 5 < 1.$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$\lg \sqrt{3,16228 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 3,16228 + \lg 10) = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75.$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$\lg \sqrt{3,16228 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 3,16228 + \lg 10) = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75.$$

$$\sqrt{3,16228 \cdot 10} = \sqrt{31,6228} \approx 5,62342$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$\lg \sqrt{3,16228 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 3,16228 + \lg 10) = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75.$$

$$\sqrt{3,16228 \cdot 10} = \sqrt{31,6228} \approx 5,62342$$

$$\lg 5,62342 \approx 0,75.$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$\lg \sqrt{3,16228 \cdot 10} = \frac{1}{2}(\lg 3,16228 + \lg 10) = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75.$$

$$\sqrt{3,16228 \cdot 10} = \sqrt{31,6228} \approx 5,62342$$

$$\lg 5,62342 \approx 0,75.$$

$$3,16228 < 5 < 5,62342 \Rightarrow 0,5 < \lg 5 < 0,75$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n-k}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

**Euler'sche
Methode**

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

dekadischer Logarithmus nach Euler

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n-k}}$$

n	a_n	$\lg a_n$
0	1	0
1	10	1
2	3,16227	0,5
3	5,62341	0,75
4	4,21696	0,625
5	4,86967	0,6875
6	5,23299	0,71875
7	5,04806	0,70312
	...	
17	5,00000	0,69897

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

natürlicher Logarithmus mit Taylor-Reihe

Basis $e \approx 2,7182818$ ist auch praktisch; $\log_e x =: \ln x$
schon wieder Leonhard Euler, und daher e : *Euler*-sche Zahl

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

natürlicher Logarithmus mit Taylor-Reihe

Basis $e \approx 2,7182818$ ist auch praktisch; $\log_e x =: \ln x$
schon wieder Leonhard Euler, und daher e : *Euler*-sche Zahl

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}.$$

gilt für $x \in (0; 2)$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

nurlicher Logarithmus mit Taylor-Reihe

Basis $e \approx 2,7182818$ ist auch praktisch; $\log_e x =: \ln x$
schon wieder Leonhard Euler, und daher e : *Euler*-sche Zahl

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}.$$

gilt fur $x \in (0; 2)$

$$\begin{aligned} \ln 1,1 &= \frac{1,1-1}{1} - \frac{(1,1-1)^2}{2} + \frac{(1,1-1)^3}{3} - \frac{(1,1-1)^4}{4} + \frac{(1,1-1)^5}{5} \mp \dots \\ &= \frac{0,1}{1} - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \frac{(0,1)^5}{5} - \frac{(0,1)^6}{6} \pm \dots \\ &= 0,1 - \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} - \frac{0,0001}{4} + \frac{0,00001}{5} - \frac{0,000001}{6} \pm \dots \\ &\approx 0,1 - 0,005 + 0,000333 - 0,000025 + 0,000002 = 0,095310 \end{aligned}$$

natürlicher Logarithmus mit Taylor-Reihe

Das ist fein für $x \in (0; 2)$, aber was macht man für $x \geq 2$?

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

natürlicher Logarithmus mit Taylor-Reihe

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Das ist fein für $x \in (0; 2)$, aber was macht man für $x \geq 2$?

$$x \geq 2 \iff 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

natürlicher Logarithmus mit Taylor-Reihe

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Das ist fein für $x \in (0; 2)$, aber was macht man für $x \geq 2$?

$$x \geq 2 \iff 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

Wie berechnen wir am besten den Wert von e ?

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e aus der Definition

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e aus der Definition

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	$(1 + 1)^1 = 2$
2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$
3	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,370$
4	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 2,441$
5	$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \approx 2,488$
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2,594$
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,705$
1000	$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2,717$

Berechnung von e mit Hilfe einer Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe einer Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe einer Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \dots \\ &\approx 1 + 1 + 0,5 + 0,16667 + 0,04167 + 0,00833 + 0,00139 + 0,00020 \\ &= 2,71808. \end{aligned}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe anderer Potenzreihen

$$e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!},$$

$$e = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 4n^2}{(2n+1)!}$$

und

$$e = 3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)n}.$$

$$\begin{aligned} e &= 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{36} - \frac{1}{288} - \frac{1}{2400} - \frac{1}{21600} - \frac{1}{211680} - \frac{1}{2257920} - \dots \\ &\approx 3 - 0,25 - 0,0277778 - 0,0034722 - 0,0004167 - 0,0000463 - \dots \\ &= 2,7182819. \end{aligned}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe von Kettenbrüchen

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe von Kettenbrüchen

$$\begin{aligned}e &\approx 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} \\ &= 2 + \frac{5}{7} \\ &\approx 2,71428.\end{aligned}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe von Kettenbrüchen

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \dots}}}}}}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

Berechnung von e mit Hilfe von Kettenbrüchen

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \dots}}}}}}}$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \frac{5}{6 + \frac{6}{7 + \dots}}}}}}}$$

Logarithmen ohne
Hilfsmittel

Robert
Geretschläger,
robert@
rgeretschlaeger.com

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

<https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at/>

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

<https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at/>

<http://www.rgeretschlaeger.com/>

Welche Hilfsmittel
gibt es?

Logarithmus
mittels Inter-
vallschachtelung

Quadratwurzeln

Euler'sche
Methode

Taylor-Reihe

Die Euler'sche
Zahl

<https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at/>

<http://www.rgeretschlaeger.com/>

robert@rgeretschlaeger.com

<https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at/>

<http://www.rgeretschlaeger.com/>

robert@rgeretschlaeger.com

Danke für die Aufmerksamkeit!