Neue Mathematik für die Schule

Kann die aktuelle mathematische Forschung einen Beitrag für den Mathematikunterricht leisten?

Ilse Fischer und Roland Steinbauer

Universität Wien

ÖMG Lehrer:innentag 2023 in Graz

Inhalt

(1) Allgemeine Überlegungen

(2) Beispiele aus der

- Diskreten Mathematik
- Geometrie
- Analysis

Die Mathematik im MU ist „alte” Mathematik

Warum?

- Traditioneller Kanon
- Zwänge durch Lehrplan, etc.
- Fokussierung auf einfache Algorithmen, Prüfbarkeit
- Bewirtschaften von „Aufgabenplantagen”
  Erlernen von Schemata zur Lösung von Standardproblemen

„Die verstärkte Konzentration auf die Förderung von bestimmten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler hat die inhaltliche Diskussion allerdings etwas in den Hintergrund treten lassen. Die in den vergangenen Jahren entwickelten standardorientierten Lehrpläne der einzelnen Bundesländer beschäftigen sich zum Großteil **auf der Basis des traditionellen Inhaltskanons mit der Umsetzung der Kompetenzförderung. Moderne Inhalte oder neue Aspekte traditioneller Inhalte kommen eher zu kurz.**"

Die Diskussion über Bildungsstandards wurde offenbar nicht als Chance wahrgenommen, den Mathematikunterricht neu zu überdenken und z.B. neue Inhalte aufzunehmen.

[Grötschel, Lutz-Westphal, (2009): *Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu einem authentischen Mathematikunterricht*, Jahresber. DMV]

Die Mathematik im MU ist „alte” Mathematik

Kann/Soll das so bleiben?

- Rechnen verliert durch Technologie immer mehr an Bedeutung

- Beitrag des MU zur Allgemeinbildung:
  3 Winter'sche Grunderfahrungen (mathematischer Blick, mathematische Welt, heuristische Fähigkeiten)

- Mathematik hat — von vielen unbemerkt — mittlerweile viele Bereiche unseres Alltags durchdrungen.

- Adäquates Bild von der Mathematik als Wissenschaft:
  JA, es gibt (ganz viel!) aktuelle mathematische Forschung
  Publikationen: 1980: 43.000   2000: 72.000   2020: 136.000

Neue Mathematik für den MU

Wie?

- Mathematische Ideen/Begriffe ins Zentrum stellen
  - Explizit *Grundvorstellungen* („Bilder im Kopf") unterrichten (Funktioniert in der LA-Ausbildung [Ableitinger, Götz, S. (2022)])
  - Operieren auf notwendiges Maß beschränken

- Neue Impulse aus der (forschungsnahen) Mathematik

  > „Der Mathematikunterricht in Schulen lebt unter anderem davon, immer wieder **neue Impulse zu bekommen und aufzunehmen**." [Grötschel, Lutz-Westphal, (2009)]

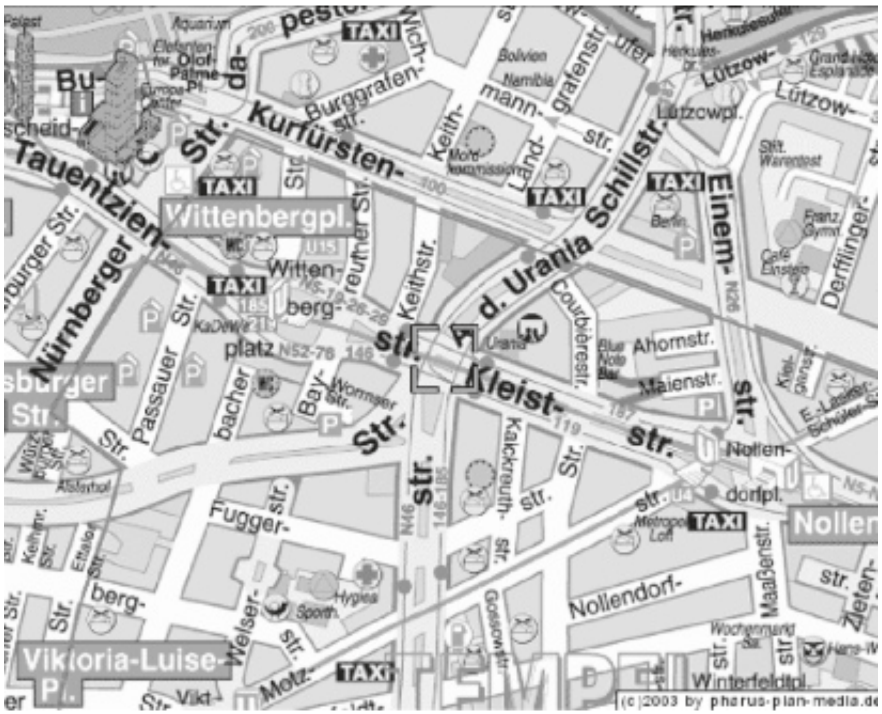
Beispiel aus der Diskreten Mathematik:

Das Briefträger:innenproblem

Rückmeldungen von Schüler:innen zur Diskreten Mathematik

- *Wie hat dir das Thema gefallen? (Klasse 8, DE)*
  - Besser als Mathe. Sehr Gut.
- *Was hat dir noch gefallen/nicht gefallen? (Klasse 8)*
  - Dass Diskrete Mathematik noch **erforscht** wird.
  - Man muss **wenig rechnen.**
- *Wie hat Ihnen das Thema gefallen? (Klasse 13)*
  - Perfekt! Total beeindruckend. Das Thema hat mich so vereinnahmt, dass ich über Wege auf meinem Duschvorhang nachgedacht habe.
  - Man konnte gut **frei arbeiten** und eigene Ideen entwickeln.
  - Gut, interessant, wirft spannende Aspekte der Mathematik in Verbindung mit der **Realität** auf.
- *Hat sich Ihr Bild von Mathematik oder Ihre Einstellung zur Mathematik durch die Arbeit an dem Thema verändert? Wenn ja, wie? (Klasse 13)*
  - Man hat gesehen, dass **nicht alles nur konkret auf Formeln** zurückzuführen ist. Außerdem hat man mal eine **direkte Anwendung von theoretischen mathematischen Problemstellungen** erfahren. Mathematiker sind in meinen Augen also nicht mehr die bloßen Theoretiker.
- *Was hast du in dieser Woche dazugelernt? (Klasse 5)*
  - **Dass Mathematik manchmal keine Mathematik ist.**

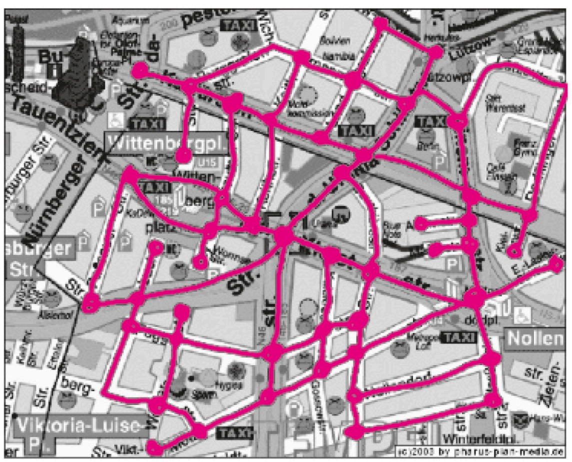
Briefträger:innenproblem

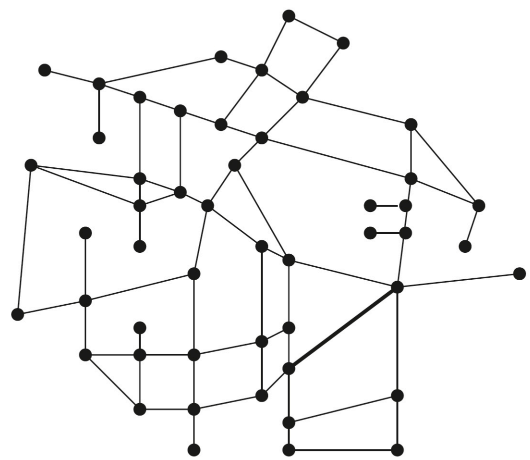


Eine Briefträgerin soll in diesem Gebiet Post austragen und es sollen dabei keine unnötigen Wege gegangen werden.

Welche Information ist für die Lösung der Aufgabe nötig?

Modellierung durch (Knoten-Kanten-)Graph





Kriterien:

(i) Jede Straße muss abgefahren werden.

(ii) Es muss eine Rundtour sein.

(iii) Der Gesamtweg muss möglichst kurz sein.

Grundidee: Modellierung, Begrifflichkeiten (hier Knoten-Kanten-Graph) wird anhand eines Alltagsproblems entwickelt

Eulertouren

Man könnte Glück haben und es gibt eine Rundtour (Eulertour) bei der jede Straße **genau einmal** abgefahren wird.

Ist das bei unserem Beispielgraphen möglichen? — Nein, schon alleine wegen der Sackgassen geht das nicht.

Was ist der Grad eines Knotens? — Anzahl der Kantenenden an einem Knoten.

Ein Graph kann nur eine Eulertour enthalten, wenn jeder Knoten geraden Grad hat: **Wenn immer man zu einem Knoten kommt, muss man auch wieder weggehen.**

Satz: Gibt es eine Eulertour, so haben alle Knoten geraden Grad. Umgekehrt: Ist ein Graph zusammenhängend und haben alle Knoten geraden Grad, so gibt es eine Eulertour.

Zwiebelschalenalgorithmus:

1. Wählen einen **Startknoten.**

2. Gehe von diesem Knoten aus entlang noch **unmarkierter Kanten** und markiere die verwendeten Kanten, solange bis ein Knoten erreicht wird, von dem **keine unmarkierte Kante mehr ausgeht.** Prüfe, ob alle Kanten des Graphen bereits markiert wurden.

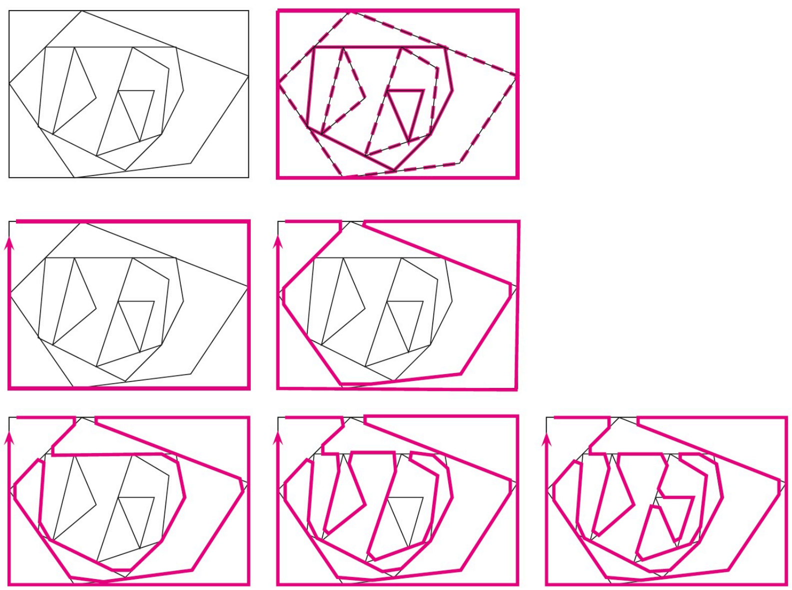
— Wenn ja, dann gehe zu Schritt 3.

— Wenn nein, dann suche einen Knoten, der noch unmarkierte Kanten besitzt und wiederhole Schritt 2.

3. Die Eulertour wird nun aus den Kreisen **zusammengesetzt:** Gehe entlang des ersten Kreises, bis er einen weiteren Kreis berührt. Folge dem neuen Kreis, bis dieser wiederum an einen nächsten Kreis stößt, und so weiter. Findest du keinen neuen beginnenden Kreis, so gehe den zuletzt begonnenen Kreis zu Ende und dann wieder in den vorherigen hinein. Und so weiter, bis alle Kanten besucht wurden.

Grundidee: Algorithmus

Veranschaulichung des Zwiebelschalenalgorithmus



Beispiel aus der Geometrie

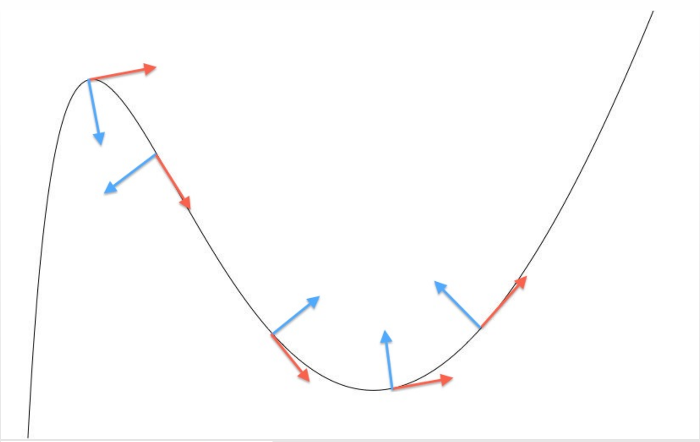
- **Krümmung als Kernbegriff der**

  modernen (Differential-)Geometrie

Krümmung als Kernbegriff der Differentialgeometrie

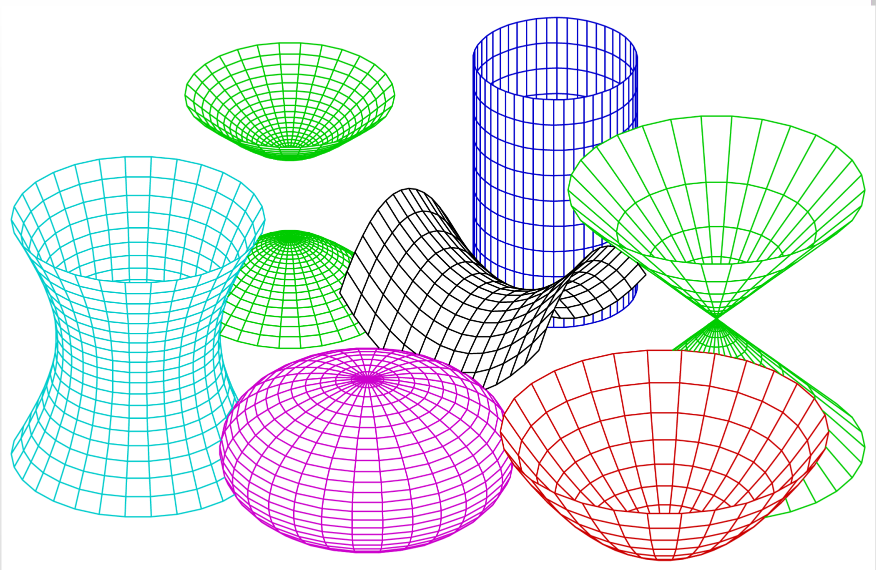
Was ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



Abweichung von Gerader

Krümmung von Flächen



Abweichung von Ebene

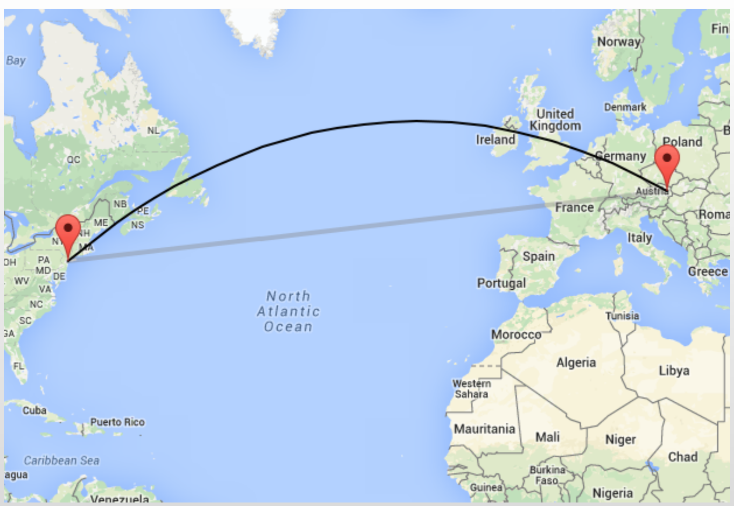
Krümmung von Flächen

- Sind gekrümmte Flächen ungewöhnlich?

  Nein! Wir alle leben auf einer!

- Was sind die wichtigsten Effekte der Krümmung?

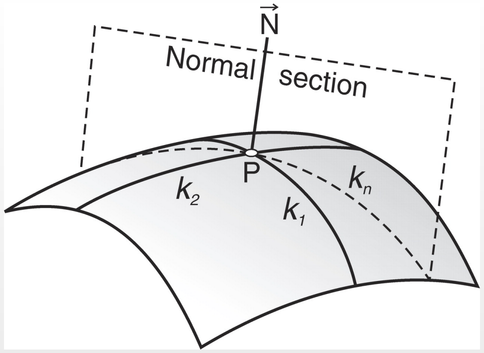
Einfache Konsequenzen: Geodäten ersetzen Geraden



- Kürzeste Verbindungen sind **nicht gerade**.
- Kürzeste Verbindungen können sich **schneiden**,
- **hören** dann **auf** kürzeste Verbindungen zu sein.

Klassische Geometrie von Flächen

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



In jedem Punkt einer Fläche gibt es eine Richtung mit

- *minimaler Krümmung* κ_1
- *maximaler Krümmung* κ_2

Theorema Egregium.

Das Produkt dieser *Hauptkrümmungen*, die

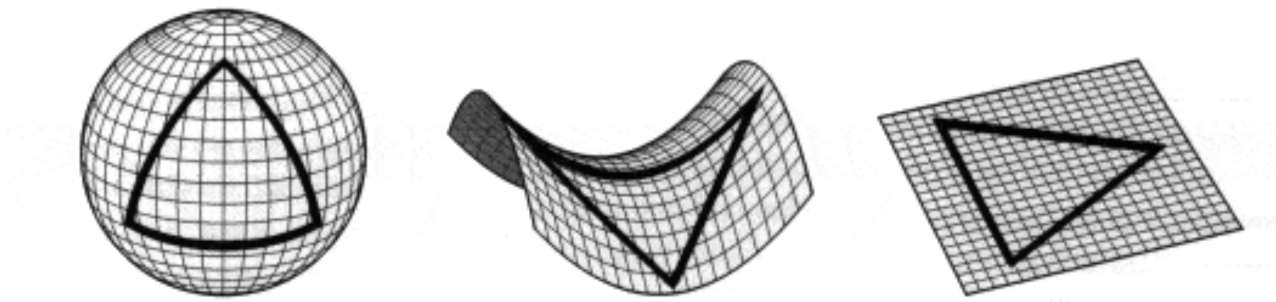
$$\textit{Gauß-Krümmung } K = \kappa_1 \kappa_2$$

ist eine Invariante unter stetigen Verformungen.

- negative Konsequenz: es gibt keine winkel- und flächentreue Landkarte; Orangenschalen zerreissen
- positive Konsequenz: Pizzaschnitten essen ohne Patzen

Anschluss an aktuelle Forschung: Längenräume

Dreiecksvergleich
in pos./neg.
Krümmung



Positive Curvature Negative Curvature Flat Curvature

Satz von Toponogov (1958): $K > 0 (< 0) \;\Leftrightarrow$ Dreiecke sind fett (dünn).

Verallgemeinerung auf metrische Räume X (nur Abstandsmessung):
X hat per def. pos./neg. Krümmung wenn Dreiecke fett/dünn sind.

Metrische Geometrie: Diese Krümmungsschranken sind unter Grenzwerten von gekrümmten Flächen stabil.
(Gromov ab 1980; Perelman's Beweis der Poincare-Vermutung, 2003)

Anschluss an aktuelle Forschung: Allgemeine Relativitätstheorie

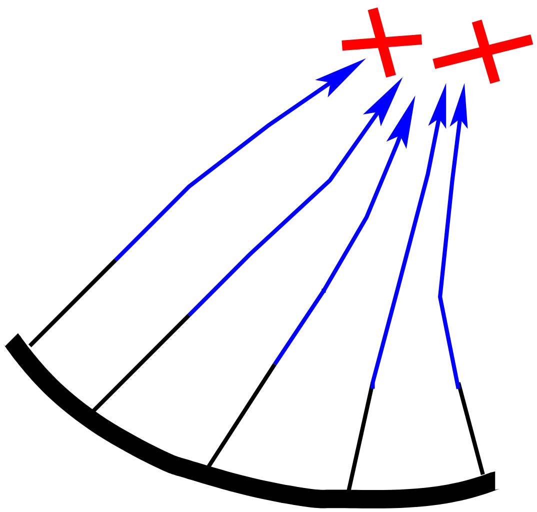
Singularitätentheoreme von Hawking & Penrose

Die gekrümmten Raumzeitzeit-Geometrien der allgemeinen Relativitätstheorie entwickeln in natürlicher Weise Singularitäten.

Penrose: Gravitationskollaps, schwarzes Loch

Hawking: Kosmologie, Urknall

1. Natürliche Bedingungen
   $\rightsquigarrow$ Geodäten beginnen zu fokussieren
2. Gravitation anziehend $\rightsquigarrow$ pos. Krümmung
   $\rightsquigarrow$ Fokussierung geht weiter
   $\rightsquigarrow$ Geodäten schneiden sich
3. Eigenzeit längs Weltlinien von Beobachtern nicht maximal
   $\rightsquigarrow$ **Widerspruch!**

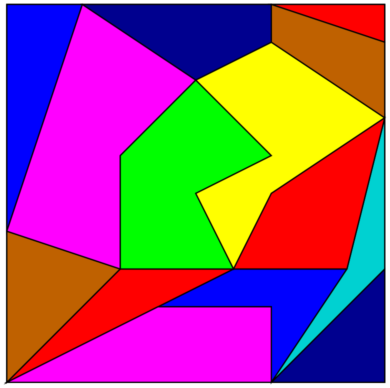


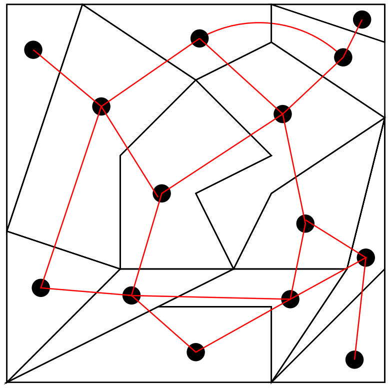
Noch ein Beispiel aus der Diskreten Mathematik:

Der Sechsfarbensatz

Färben von Landkarten

Schritt 1: Von der Landkarte zum Hauptstädtegraph





Die Hauptstädte von Ländern, die eine gemeinsame Grenze haben, werden durch eine Kante verbunden. Die Hauptstädte sind die Knoten des Graphs.

Der Grad deg(v) eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten ausgehen.

Um den Graphen algorithmisch mit 6 Farben zu färben, würde es genügen, immer einen Knoten zu finden, dessen Grad höchstens 5 ist.

Zwei Gleichungen und eine Ungleichung über solche Graphen

V = Anzahl der Knoten $\quad E$ = Anzahl der Kanten $\quad F$ = Anzahl der Gebiete

Eulersche Polyederformel: $V - E + F = 2$

Hinweis für den Beweis: Löscht man **eine** Kanten, die zwei Gebiete verbindet, verringert man die Anzahl der Gebiete auf um **eins**. Also $E \to E - 1$ führt zu $F \to F - 1$. Das kürzt sich in $-E + F$ in der Formel.

Eine Ungleichung: $2E \geq 3F$

Hinweis für den Beweis: Wandere durch alle Gebiet und zähle jeweils die Kanten, die es umrandet. In jedem Gebiet sieht man mindestens **drei** Kanten, daher zählt man insgesamt mindestens $3F$ Kanten. Andererseits sieht man jede Kante **zweimal**, weil man sie von zwei Seiten sieht, daher muss $3F$ kleiner oder gleich $2E$ sein.

Handschlaglemma: $\sum_{v \text{ Knoten}} \deg(v) = 2E$

Hinweis für den Beweis: Jede Kante hat **zwei** Endknoten.

Kombiniere die Eulersche Polyederformel und die Ungleichung:

$$2E \geq 3F = 6 + 3E - 3V$$

Daraus folgt $3V - 6 \geq E$ und daher $3V < E$.

Erinnern uns, dass wir zeigen wollen, dass es einen Knoten gibt, dessen Grad höchstens 5 ist.

Indirekt: Angenommen für alle Knoten v gilt $\deg(v) \geq 6$.

Nun verwenden wir das Handschlaglemma:

$$2E = \sum_{v \text{ Knoten}} \deg(v) \geq \sum_{v \text{ Knoten}} 6 = 6V$$

Also $E \geq 3V$ und das ist ein Widerspruch zu $3V < E$.

Anschluss an aktuelle Forschung: Der Vierfarbensatz wurde bisher nur mittels Computereinsatz bewiesen und daher nicht wirklich verstanden.

Beispiel aus der Analysis

- **Das „Unendliche”**

Weitere Idee: Kognitive Vorurteile nach Kahneman & Tversky (zb. Verfügbarkeitsheuristik) vs. Statistik & grundlegende Logik.

Quelle: (Pinker, Rationality, 2021)

Konvergenz und zwei Sichtweisen auf das Unendliche

Aristoteles (384–322 v.u.Z.)

Das potentiell Unendliche ist die in der Vorstellung vorhande Möglichkeit einer fortwährenden, nicht endenden Wiederholung einer Handlung oder eines Prozesses. (fortlaufendes Zählen, Verstreichen der Zeit, Teilen einer Strecke)

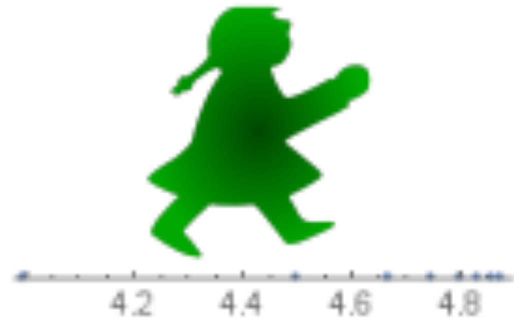
Da so eine unendliche Gesamtheit niemals „wirklich durchlaufen“ werden kann, ist das Unendliche in diesem Sinn nicht „wirklich vorhanden“.
Im Gegensatz dazu:

Das Aktual Unendliche bei dem bereits das Ergebnis eines unendlichen Prozesses vorliegt. (Fläche, durch Zusammenfügen unendl. vieler Stücke entstanden)

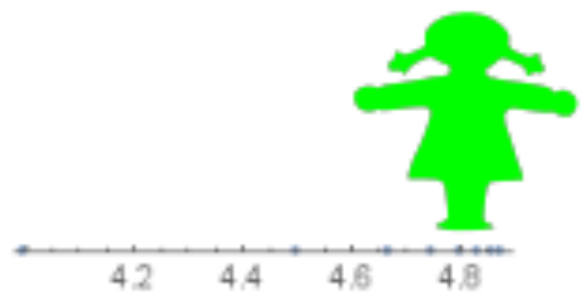
Spannungsfeld: endliches Ergebnis eines unendlichen Prozesses

Konvergenz und zwei Sichtweisen auf das Unendliche

- **Dynamische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. **Mitgehen**
  2. schauen, ob Folge sich stabilisiert



- **Statische** Sichtweise auf Grenzwert
  1. An möglichen Grenzwert **stellen**
  2. schauen ob Folge schließlich in jeder Umgebung bleibt



Explizites Unterrichten von (Grund-)Vorstellungen führt bei LA-Studierenden zu verbessertem Verständnis (Ableitinger, Götz, S. 2022)

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Literatur

C. Ableitinger, S. Götz, R. Steinbauer, Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. Math. Didactica 45, 2022.

S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hrsg.), *Diskrete Mathematik erleben.* 2.Aufl. Springer, 2014.

Grötschel, B. Lutz-Westphal, Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht. Jahresber. DMV 11, 3–22, 2009.

S. Pinker, *Rationality: What It Is, Why It Seems Scarce, Why It Matters.* Viking, 2021.

R. Steinbauer, Die Entzauberung des Unendlichen. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG, 53, 135–150, 2021.