Das Fach und die Praxis im Blick – mathematikdidaktische Forschungsansätze, Befunde und Vorschläge für den Unterricht

Andreas Büchter ▪ 22. September 2023

Übersicht

- Einleitung: Meine Auffassung von Mathematikdidaktik
- Beispiel 1: Sprache im Mathematikunterricht – Textaufgaben
- Beispiel 2: Vorstellungen zum Tangentenbegriff
- Beispiel 3: Bruchdivision – revisited
- Perspektiven für mathematikdidaktische Forschung und Entwicklung
- Rückfragen und Diskussion

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Einleitung

Meine Auffassung von Mathematikdidaktik

Was ist Mathematikdidaktik?

- … eine gut ausgebaute, eigenständige Wissenschaftsdisziplin mit umfassende Anteilen in den Lehramtsstudiengängen.

Versuche der inhaltlichen Klärung:

- … eine kommentierte Sammlung von bewährten Handlungsschemata („Rezepten“) für den Unterrichtsalltag?

Problem: überkomplexe Situationen

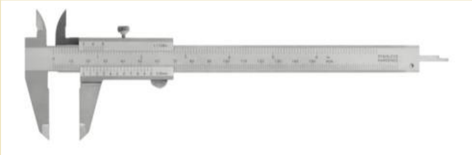
Meine Auffassung von Mathematikdidaktik

Was ist Mathematikdidaktik?

- … eine gut ausgebaute, eigenständige Wissenschaftsdisziplin mit umfassende Anteilen in den Lehramtsstudiengängen.

Versuche der inhaltlichen Klärung:

- … eine kommentierte Sammlung von bewährten Handlungsschemata („Rezepten“) für den Unterrichtsalltag?
- … eine an entsprechenden Richtungen der Psychologie orientierte Wissenschaft, die die „Natur“ fachbezogener Lernprozesse erforscht?



Problem: überkomplexe Situationen

Was ist Mathematikdidaktik?

- … eine gut ausgebaute, eigenständige Wissenschaftsdisziplin mit umfassende Anteilen in den Lehramtsstudiengängen.

Versuche der inhaltlichen Klärung:

- … eine kommentierte Sammlung von bewährten Handlungsschemata („Rezepten“) für den Unterrichtsalltag?
- … eine an entsprechenden Richtungen der Psychologie orientierte Wissenschaft, die die „Natur“ fachbezogener Lernprozesse erforscht?
- … die Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik,

  die Orientierungs- und Reflexionswissen für die Praxis in einem dialogischen Prozess mit der Praxis erarbeitet und zur Verfügung stellt.

  (→ ggf. eher eine Zielvorstellung als eine Zustandsbeschreibung)

Beispiel 1

Sprache im Mathematikunterricht – Textaufgaben

Ein Beispiel aus dem Unterricht

Hier sehen Sie ein typisches Tafelbild aus einer Unterrichtsreihe, in der proportionale Zuordnungen erarbeitet werden.

- Welche sprachlichen Mittel spielen für die Charakterisierung von proportionalen Zuordnungen eine besondere Rolle?
- Welche Wörter sind besonders wichtig?

Kartoffeln [in kg]	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
Preis [in €]	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50

Wenn sich die Menge verdoppelt, dann verdoppelt sich auch der Preis.
Wenn sich die Menge halbiert, dann halbiert sich auch der Preis.

Ein Beispiel aus dem Unterricht

Hier sehen Sie ein typisches Tafelbild aus einer Unterrichtsreihe, in der proportionale Zuordnungen erarbeitet werden.

- Welche sprachlichen Mittel spielen für die Charakterisierung von proportionalen Zuordnungen eine besondere Rolle?
- Welche Wörter sind besonders wichtig?

Kartoffeln [in kg]	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
Preis [in €]	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50

Wenn sich die Menge verdoppelt, dann verdoppelt sich auch der Preis.
Wenn sich die Menge halbiert, dann halbiert sich auch der Preis.

Ein Beispiel aus dem Unterricht

Hier sehen Sie ein typisches Tafelbild aus einer Unterrichtsreihe, in der proportionale Zuordnungen erarbeitet werden.

- Welche sprachlichen Mittel spielen für die Charakterisierung von proportionalen Zuordnungen eine besondere Rolle?
- Welche Wörter sind besonders wichtig?

Kartoffeln [in kg]	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
Preis [in €]	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50

Wenn sich die Menge verdoppelt, dann verdoppelt sich auch der Preis.
Wenn sich die Menge halbiert, dann halbiert sich auch der Preis.

Diskussion über „Textlastigkeit“ in Prüfungen

a) Am 27. April 2005 fand der Erstflug des A380 in Frankreich statt.
Nach erfolgreichem Start um 10:29 Uhr war der Airbus bis zu seiner Landung 3 Stunden und 54 Minuten in der Luft.
Die Maschine startete mit einem Gewicht von 421 Tonnen. Das maximale Startgewicht beträgt 560 Tonnen.
Der A380 kann maximal in einer Höhe von 42 980 ft (Fuß) fliegen. Im Tank des A380 können maximal 248 Tonnen Treibstoff sein.

Diskussion über „Textlastigkeit“ in Prüfungen

a) Am 27. April 2005 fand der Erstflug des A380 in Frankreich statt.
Nach erfolgreichem Start um 10:29 Uhr war der Airbus bis zu seiner Landung 3 Stunden und 54 Minuten in der Luft.
Die Maschine startete mit einem Gewicht von 421 Tonnen. Das maximale Startgewicht beträgt 560 Tonnen.
Der A380 kann maximal in einer Höhe von 42 980 ft (Fuß) fliegen. Im Tank des A380 können maximal 248 Tonnen Treibstoff sein.

a1) Um wie viel Uhr ist der A380 auf se... m Erstflug gelandet?

a2) Wie viel Tonnen hätten vor dem Start noc... len werden können?

a3) Wie viel Prozent des maximalen Startgewichts h...
Notiere deine Rechnung.

a4) Ein Fuß entspricht 30,48 cm. Wie gr...
Notiere deine Rechnung.

a5) Ein Liter Treibstoff wiegt 0,8 kg. Wie viel Liter ...
Notiere deine Rechnung.

„Die Aufgaben sind zu textlastig und benachteiligen unsere Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund.“

Diskussion über „Textlastigkeit“ in Prüfungen

c) Das Flugzeug hat regulär 555 Sitze in drei Klassen.
Auf Wunsch der Fluggesellschaft können bis zu 53,7 % mehr Sitze eingebaut werden.
Wie viele Sitze können maximal im Flugzeug eingebaut sein? Notiere deine Rechnung.

„Es sind eher Aufgaben die bestimmte eigenständige Denkleistungen erfordern, die empirisch schwierig sind.“

e) Ein Quader hat das Volumen 140 cm^3. Welche Seitenlängen kann er haben?
Gib eine Möglichkeit an.

Aufgreifen des Themas in der Forschung

Projekt: „Sprachliche und konzeptuelle Herausforderungen für mehrsprachige Lernende in den Zentralen Prüfungen 10 Mathematik – Empirische Analysen" (Antrag: Susanne Prediger, Claudia Benholz)

Ausgewählte Ergebnisse (Prediger et al., 2015):

- Sprachkompetenz ist wichtiger als andere Hintergrundmerkmale.
- Textlänge ist nicht alleine schwierigkeitsgenerierend.
- Als zentrale Hürden für sprachschwache Lernende konnten vor allem konzeptuelle und prozessuale Anforderungen identifiziert werden.

Aufgreifen des Themas in der Forschung

- Vertiefung in Dissertationen:
  - „Kohäsion und Kohärenz in mathematischen Prüfungstexten türkisch-deutschsprachiger Schülerinnen und Schüler. Eine multiperspektivische Untersuchung.“ (Erkan Gürsoy, 2016)

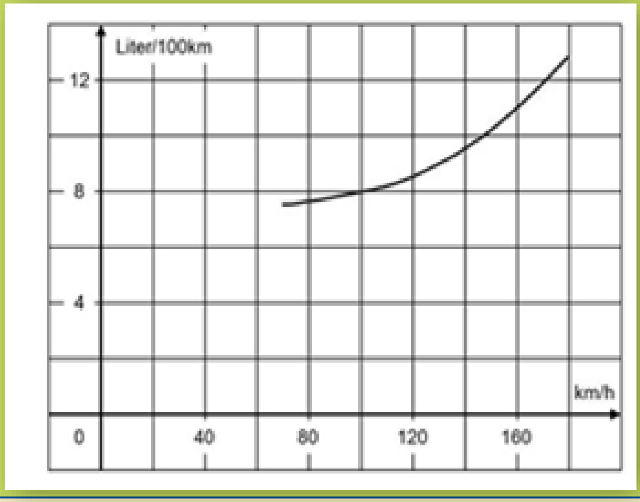
Präpositionen als Herausforderung

Der Kraftstoffverbrauch wird für Fahrzeuge durch den durchschnittlichen Verbrauch in Litern (ℓ) auf einer Stecke von 100 Kilometern angegeben. Der Kraftstoffverbrauch eines Autos hängt vor allem von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

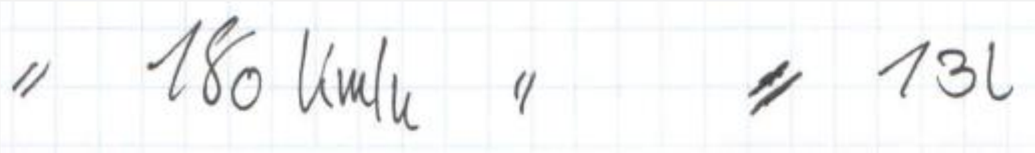
(a) Das Diagramm zeigt den Kraftstoffverbrauch für ein Auto, das im höchsten Gang gefahren wird. Daher beginnt der Graph bei 70 km/h.

(1) Wie schnell fährt das Auto durchschnittlich, wenn es 11 ℓ auf 100 km verbraucht?

(2) Um wie viel Prozent liegt der Verbrauch bei 180 km/h über dem Verbrauch bei 100 km/h? Notiere deine Rechnung.



Präpositionen als Herausforderung

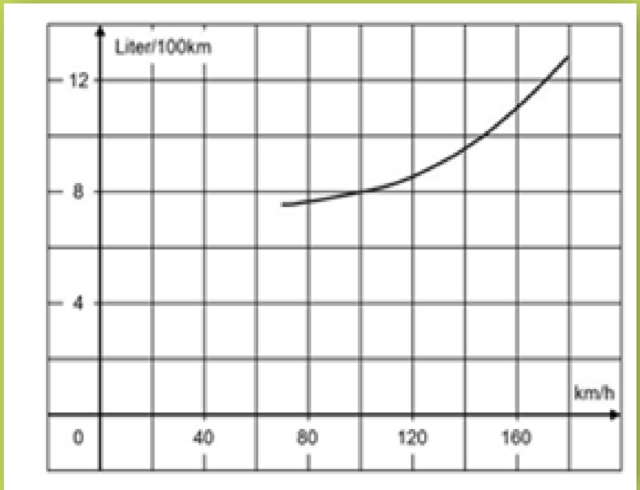
H	Ja. Das verwirrt mich jetzt auch wieder dann hier. Ob das jetzt- soll ich mal den- wenn das jetzt so weiter gehen würde, dann wäre das hier jetzt, warte mal, 10, 11, 13 Liter. Also für 180 Kilometer pro Stunde. Benötige ich dann 13 Liter. [*schreibt es auf*]  Ok. Dann äh- wie schnell fährt man- Um wie viel Prozent liegt der Verbrauch bei [*7 sec.*] Um wie viel Prozent liegt der Verbrauch bei <u>180</u> [*2 sec.*] über dem Verbrauch beim [*2 sec.*] 100 Kilometer. [*6 sec.*] <u>Über</u> dem Verbrauch bei 100 Kilometer, also d. h. äh muss ich jetzt dann rechnen für wie viel 100- äh für- [*2 sec.*] ver- [*2 sec.*] für 100 Kilometer, wie viel Liter in Prozent brauch ich und danach, wenn ich dann 180 fahre, wie viel kommen noch dazu, ne? <u>Über</u> den, oder? <u>Über</u> den. Über den Verbrauch bei 100 Kilometern pro Stund- nee.

Präpositionen als Herausforderung

Der Kraftstoffverbrauch wird für Fahrzeuge durch den durchschnittlichen Verbrauch in Litern (ℓ) auf einer Stecke von 100 Kilometern angegeben. Der Kraftstoffverbrauch eines Autos hängt vor allem von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

(a) Das Diagramm zeigt den Kraftstoffverbrauch für ein Auto, das im höchsten Gang gefahren wird. Daher beginnt der Graph bei 70 km/h.

- (1) Wie schnell fährt das Auto durchschnittlich, wenn es 11 ℓ auf 100 km verbraucht?
- (2) Um wie viel Prozent liegt der Verbrauch bei 180 km/h über dem Verbrauch bei 100 km/h? Notiere deine Rechnung.



Aufgreifen des Themas in der Forschung

- Vertiefung in Dissertationen:
  - „Kohäsion und Kohärenz in mathematischen Prüfungstexten türkisch-deutschsprachiger Schülerinnen und Schüler. Eine multiperspektivische Untersuchung.“ (Erkan Gürsoy, 2016)
  - „Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben. Quantitative und qualitative Analysen sprachlicher und konzeptueller Hürden.“ (Nadine Wilhelm, 2016)

Schätze, wie viele Kilometer hoch ein Turm aus 2,4 Milliarden 1-Cent-Münzen ungefähr wäre. Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

Aufgreifen des Themas in der Forschung

- Vertiefung in Dissertationen:
  - „Kohäsion und Kohärenz in mathematischen Prüfungstexten türkisch-deutschsprachiger Schülerinnen und Schüler. Eine multiperspektivische Untersuchung.“ (Erkan Gürsoy, 2016)
  - „Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben. Quantitative und qualitative Analysen sprachlicher und konzeptueller Hürden.“ (Nadine Wilhelm, 2016)
  - „Zur Erforschung des Zusammenhangs zwischen Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Oberflächlichkeit als potenzieller Mediator.“ (Sabine Schlager, 2020)
- Zusätzliche Vertiefung in Abschlussarbeiten u. Lehrforschungsprojekten

Aufgreifen des Themas in der Forschung

- S: Ähmm einundzwanzig durch vier ist fünf… nein 20 Rest 1. Dann ist das mal.
  Dass es durch nicht geht, müssen wir mal rechnen.
  L: Also, weil durch nicht geht, musst du jetzt mal rechnen?
  S: Ja. vierundachtzig kommt... Das ist zu viel…
  L: Was bedeutet das jetzt?
  S: Dass es plus ist. Das sind fünfundzwanzig.
  L: Bist du jetzt fertig mit der Aufgabe?
  S: (liest noch einmal die Fragestellung der Aufgabe)
  Ja, fünfundzwanzig Tretboote.

In der Klasse 6a sind 21 Kinder. Gemeinsam mit der Lehrerin möchten sie Tretboote leihen. Auf ein Tretboot passen vier Personen. Wie viele Tretboote müssen sie leihen?

- Zusätzliche Vertiefung in Abschlussarbeiten u. Lehrforschungsprojekten

Gestaltung eines sprachsensiblen Mathematikunterricht

- Konsequente Berücksichtigung der sprachlichen Dimension bei der Unterrichtsplanung und Materialerstellung (Makro-Scaffolding)
- offensive Ansätze (statt defensiver Ansätze)
- von der „Sprache des Verstehens“ zur „Sprache des Verstandenen“ (Wagenschein 1968)
- Orientierung an „natürlichen“ Förderstrategien (Eltern-Kind-Interaktion):
  - Sprachvorbild sein
  - Sprachproduktion anregen
  - Situationsbezogene sprachliche Gerüste anbieten (Mikro-Scaffolding)

Beispiel 2

Vorstellungen zum Tangentenbegriff

Die Differenz zwischen Gelehrtem und Gelerntem

- Im Lehr-Lernprozess gibt es Unterschiede zwischen
  - fachlich geklärten Vorstellungen (Grundvorstellungen) und
  - individuellen Vorstellungen von Schüler:innen.
- Rein stofflich orientierte Didaktik reagiert hierauf traditionell mit
  - einer Betonung der fachlich geklärten Vorstellungen und
  - didaktischer Optimierung von deren Vermittlung („des Lehrgangs“).
- Für produktive Lehr-Lern-Situationen ist es wichtig,
  - die fachlich geklärten Vorstellungen von den individuellen Vorstellungen der Schüler:innen aus zu rekonstruieren (vgl. Kattmann et al., 1997),
  - also mögliche Lerngänge in den Blick zu nehmen.

Untersuchung zum Tangentenbegriff

- Die im Folgenden betrachteten Bearbeitungen sind Antworten auf die Frage: „Was ist eine Tangente?“
- Alle Schüler:innen befanden sich zum Zeitpunkt der Bearbeitung in der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe.
- Für die Beantwortung der Fragen stand im Prinzip unbegrenzt Zeit zur Verfügung (genutzt wurden ca. 10 Minuten).
- Die Schüler:innen durften die Beispiele und die Art der Darstellung selbst wählen.

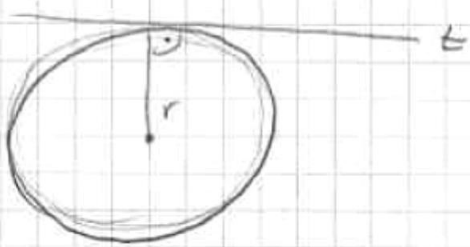
Ausgewählte Bearbeitung 1

Was ist eine Tangente?

Der Begriff kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „berühren" (tangere, tangens [PPA] ⇒ berührend]

Die ~~Ber~~ Berührende; sie ist die Bezeichnung für eine Gerade, die nur in einem Punkt berührt

Beispiel: Kreis



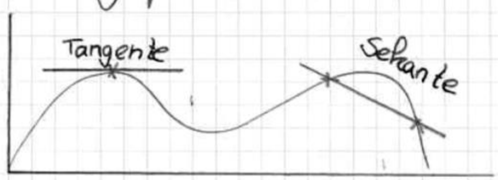
In der Differenzialrechnung wird die Tangente benötigt, um die Steigung einer Kurve zu berechnen.

Da ja nur nach der Steigung in einem Punkt gesucht wird, benötigt man eine lineare Funktion (mit einer Steigung m), die nur ~~die~~ einen Punkt mit der Funktion gemein hat. Man benötigt also eine Tangente

Ausgewählte Bearbeitung 2

Was ist eine Tangente? 13.12.11

- Tangentengleichung $y=mx+b$
  → Tangente ist eine Gerade
- sie berührt einen Funktionsgraphen nur an einem Punkt
  → Gegensatz: Sekante schneidet den Graphen in zwei Punkten



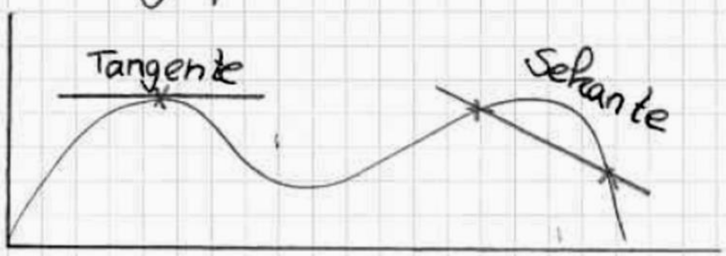
- eine Tangente im Extremum besitzt die Steigung $m=0$
  → $f'(x)=0=m$

→ die Steigung der Tangente lässt sich berechnen indem man die Werte des Punktes $P(x/y)$, welchen sie berührt, in die Ableitung des berührten Funktionsgraphen einsetzt

Ausgewählte Bearbeitung 2

Was ist eine Tangente?

- Tangentengleichung $y = mx + b$
  → Tangente ist eine Gerade
- sie berührt einen Funktionsgraphen nur an einem Punkt
  → Gegensatz: Sekante schneidet den Graphen in zwei Punkten



- eine Tangente im Extremum besitzt die Steigung $m=0$
  → $f'(x) = 0 = m$

→ die Steigung der Tangente lässt sich berechnen indem man die Werte des Punktes $P(x/y)$, welchen sie berührt, in die Ableitung des berührten Funktionsgraphen einsetzt

Reflexion der Ergebnisse

- Auf die Frage „Was ist eine Tangente?“ haben die Schüler:innen sowohl in eigenen als auch in konventionellen Worten geantwortet, wobei individuelle Formulierungen dominieren.
- In die Bearbeitungen gehen nicht nur individuelle Vorstellungen zum Tangentenbegriff, sondern auch Verbalisierungskompetenzen und Vorstellungen zu tragfähigen Begriffsklärungen ein.
- Wird bei einer Bearbeitung Veränderungs- oder Ergänzungsbedarf gesehen, kann die Ursache in jedem der drei Bereiche liegen.
- In den Bearbeitungen werden nahezu immer „(genau) ein gemeinsamer Punkt“ und „berühren“ als Charakteristika von Tangenten (auch in der Differenzialrechnung) genannt.

Blicke in Schulbücher („Ursachenforschung“)

Info

Tangenten konstruieren

Wenn eine Gerade t einen Kreis in genau einem Punkt P berührt, so nennt man sie Tangente. Eine Tangente steht stets senkrecht auf der Strecke $\overline{MP}$. Umgekehrt gilt, dass eine Gerade t stets Tangente an einen Kreis ist, wenn an dem gemeinsamen Punkt von Kreis und Gerade ein rechter Winkel wie in Fig. 4 entsteht.

Man kann daher mit einem Thaleskreis

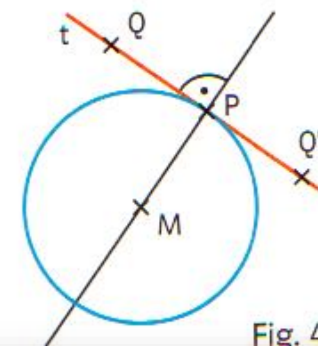


Fig. 4

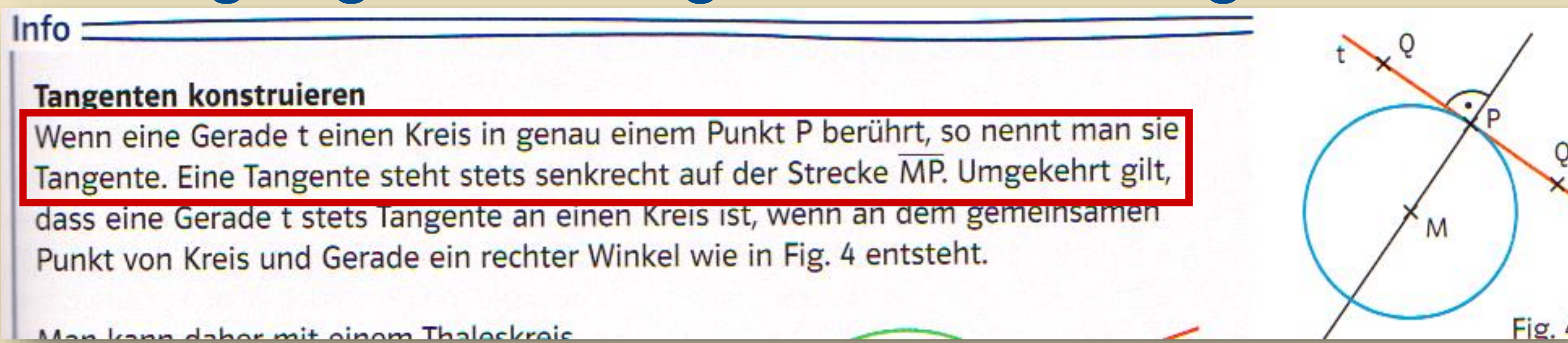
Fig. 1

Wenn eine Gerade und eine Parabel nur einen gemeinsamen Punkt (Berührpunkt) haben, nennt man diese Gerade eine **Tangente** an die Parabel. Die zugehörige Funktionsgleichung heißt Tangentengleichung. Eine Gerade, die mit einer Parabel zwei gemeinsame Punkte (Schnittpunkte) besitzt, nennt man **Sekante**. Eine Gerade ist eine **Passante** einer Parabel, wenn sie mit der Parabel keine gemeinsamen Punkte hat (Fig. 1).

Sekantengleichung aufstellen

Definition: Die Gerade durch den Punkt $P(u|f(u))$ mit der Steigung $f'(u)$ nennt man **Tangente** des Graphen von f in u. Man sagt: „Der Graph von f hat an der Stelle u die Steigung $f'(u)$.“

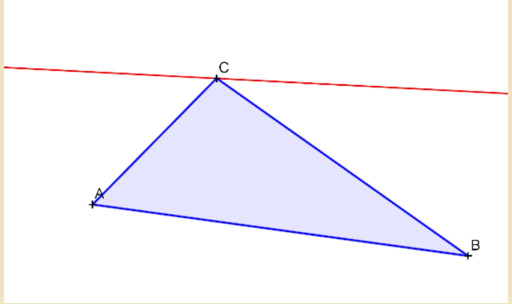
Überlegungen zur Begriffsentwicklung

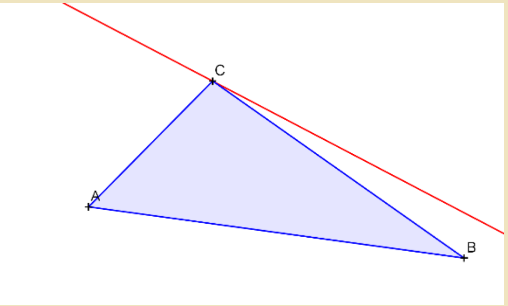

Info

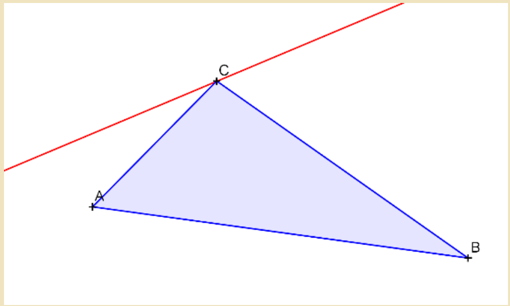
Tangenten konstruieren

Wenn eine Gerade t einen Kreis in genau einem Punkt P berührt, so nennt man sie Tangente. Eine Tangente steht stets senkrecht auf der Strecke $\overline{MP}$. Umgekehrt gilt, dass eine Gerade t stets Tangente an einen Kreis ist, wenn an dem gemeinsamen Punkt von Kreis und Gerade ein rechter Winkel wie in Fig. 4 entsteht.

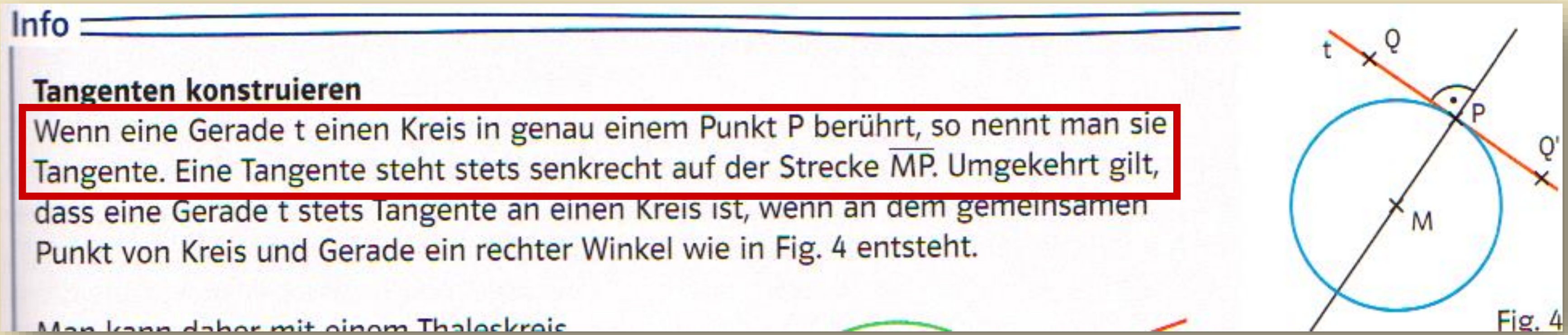
Man kann daher mit einem Thaleskreis







Überlegungen zur Begriffsentwicklung

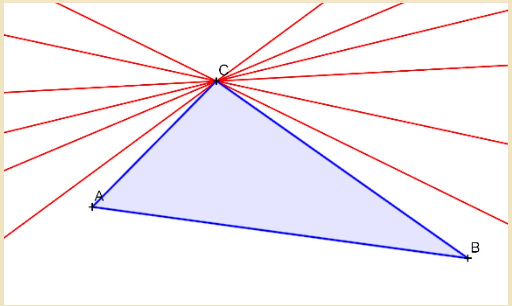

Info

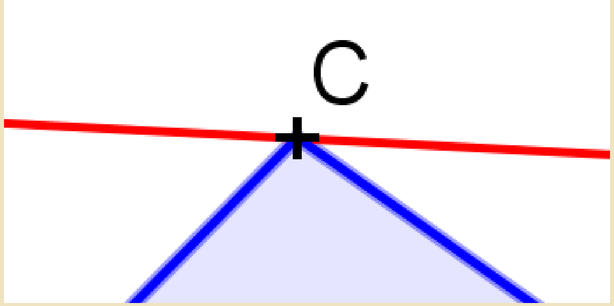
Tangenten konstruieren

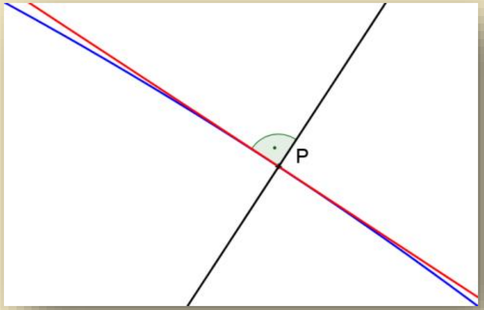
Wenn eine Gerade t einen Kreis in genau einem Punkt P berührt, so nennt man sie Tangente. Eine Tangente steht stets senkrecht auf der Strecke $\overline{MP}$. Umgekehrt gilt, dass eine Gerade t stets Tangente an einen Kreis ist, wenn an dem gemeinsamen Punkt von Kreis und Gerade ein rechter Winkel wie in Fig. 4 entsteht.

Man kann daher mit einem Thaleskreis

Fig. 4



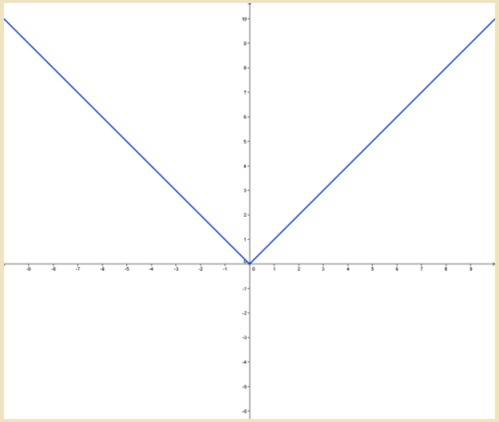


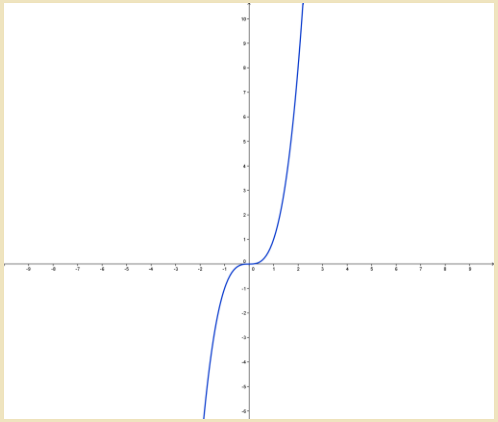


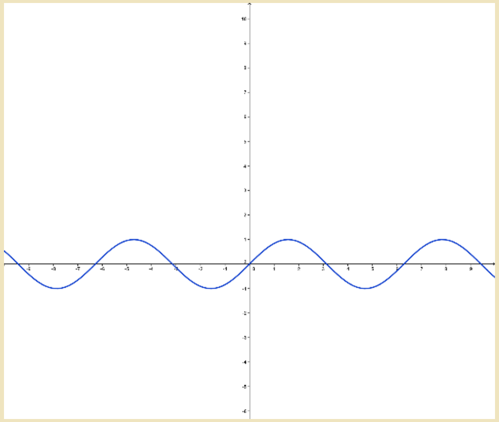
Förderung der weiteren Begriffsentwicklung

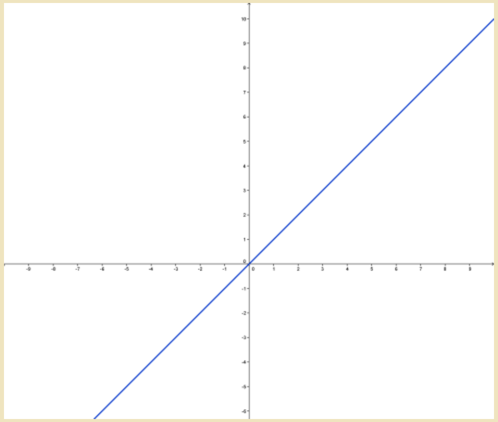
- Förderung bedeutet Weiterlernen durch eine erneute Auseinandersetzung mit dem fraglichen fachlichen Gegenstand.
- Für die Ausführungen zum Tangentenbegriff bedeutet dies,
  - dass die Schüler:innen selbst die Gelegenheit zur Überarbeitung ihrer Dokumente bekommen sollten und
  - dass sie zielgerichtete Impulse (z. B. kontrastierende Beispiele und Aushandlungsprozesse in der Lerngruppe) hierfür benötigen.

Kontrastierende Beispiele









Förderung der weiteren Begriffsentwicklung

- Förderung bedeutet Weiterlernen durch eine erneute Auseinandersetzung mit dem fraglichen fachlichen Gegenstand.
- Für die Ausführungen zum Tangentenbegriff bedeutet dies,
  - dass die Schüler:innen selbst die Gelegenheit zur Überarbeitung ihrer Dokumente bekommen sollten und
  - dass sie zielgerichtete Impulse (z. B. kontrastierende Beispiele und Aushandlungsprozesse in der Lerngruppe) hierfür benötigen.
- Dabei sollten unter anderem die folgenden Fragen diskutiert werden:
  - Welche Aspekte des Tangentenbegriff bleiben unverändert?
  - Welche Aspekte ändern sich?
  - Welche neuen Aspekte kommen hinzu?

Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen

- Spiralcurriculum: Der Begriff der Tangente an Kreise und Parabeln muss offen sein für eine spätere Verallgemeinerung.
- Ausgewogenheit der Grundvorstellungen: Sowohl die lokale Änderungsrate als auch die lokale Linearität sind bedeutsam.
- Reichweite der Begriffsentwicklung: keine Bindung an spezielle Funktionstypen (wie z. B. Parabeln oder Potenzfunktionen).
- Reflexion der Begriffsbildung: Tangenten führen zur Idee des Differenzialquotienten, werden aber durch ihn eindeutig definiert.
- Berücksichtigung von „Grenz- und Extremfällen“:
  $f(x) = |\, x \,|$; $g(x) = x^3$; $h(x) = \sin(x)$; $i(x) = x$

Beispiel 3

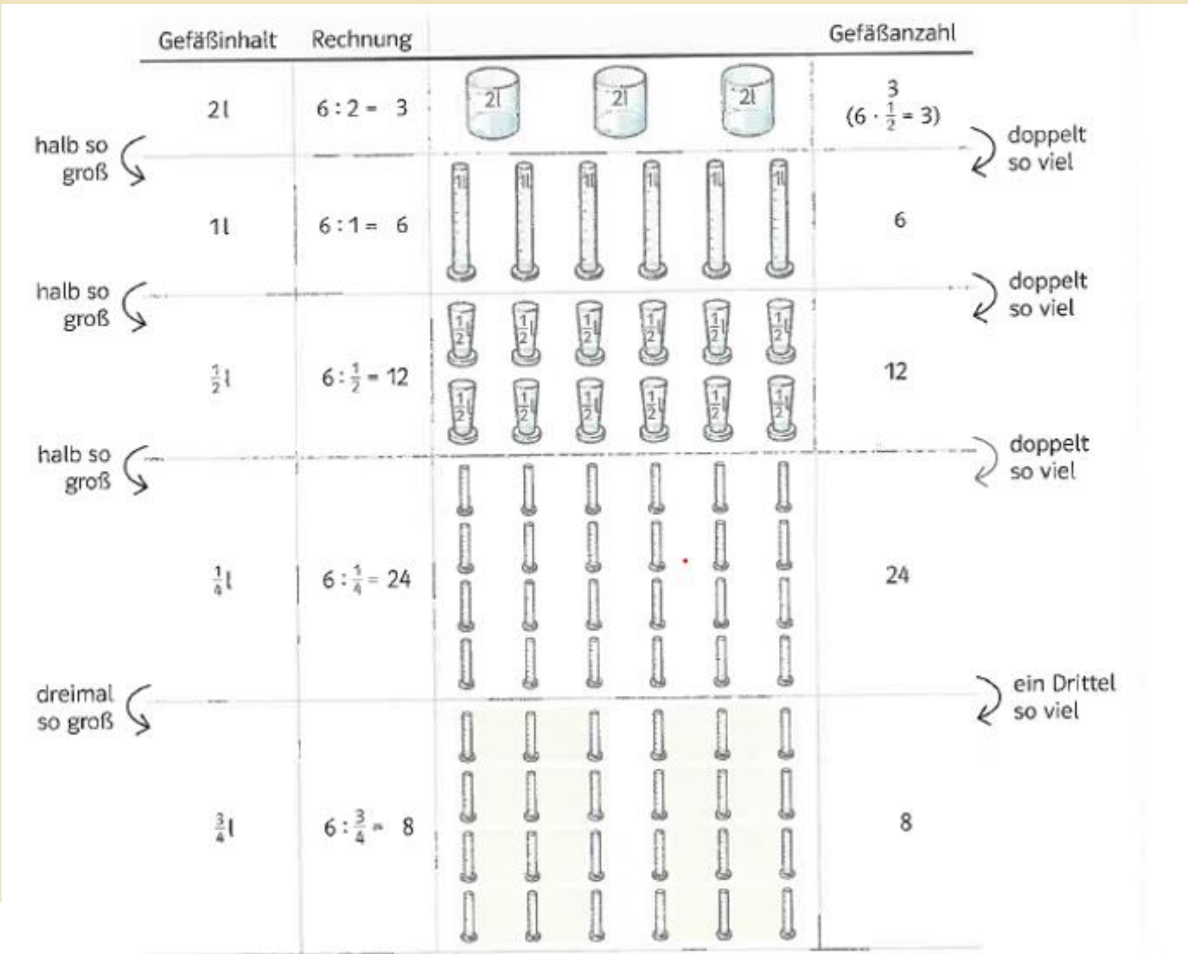
Bruchdivision – revisited

Ausgangspunkt und Gestaltung der Untersuchung

Im Projekt geht es um einen konstruktiven Vorschlag zur Herleitung der Regel zur Bruchdivision.

- Ausgangspunkt waren Beobachtungen beim Einsatz eines Erklärvideos, das von Lehramtsstudierenden im Vorbereitungsseminar zum Praxissemester entwickelt wurde.
- Es folgten vier Untersuchungsschritte:
  - Schulbuchanalyse (längs- und querschnittlich)
  - Aufarbeitung des didaktischen Diskurses seit den 1950er-Jahren
  - Interviews mit Lehrkräften als Expert:innen für Unterricht
  - Erhebung bei Schüler:innen (Vorstellungen, Regelformulierung, Fertigkeiten)

Herleitung der Divisionsregel in Schulbüchern – Var A



Herleitung der Divisionsregel in Schulbüchern – Var B

1. Pauls Vater ist Landwirt. Er hat auf $\frac{3}{4}$ ha Blumenkohl angebaut. Das sind $\frac{5}{8}$ seines Feldes.
Wie groß ist das ganze Feld?

Lösung

$\frac{5}{8}$ des Feldes sind $\frac{3}{4}$ ha groß.
Das Pfeilbild verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Multiplizieren und Dividieren.

Das Ganze

Größe des Feldes $\underset{:\frac{5}{8}}{\overset{\cdot\frac{5}{8}}{\rightleftarrows}}$ $\frac{3}{4}$ ha

Die Multiplikation mit $\frac{5}{8}$ soll durch die Division durch $\frac{5}{8}$ rückgängig gemacht werden.
Dazu müssen wir die beiden Teilschritte der Multiplikation rückgängig machen.

Multiplikation mit $\frac{5}{8}$:

Größe des Feldes $\xrightarrow{\cdot\frac{5}{8}}$ $\frac{3}{4}$ ha

Größe des Feldes $\xrightarrow{:8}\ \xrightarrow{\cdot 5}$ $\frac{3}{4}$ ha

Rückgängigmachen der Multiplikation:

Größe des Feldes $\xleftarrow{\cdot 8}\ \xleftarrow{:5}$ $\frac{3}{4}$ ha

Größe des Feldes $\xleftarrow[\cdot\frac{8}{5}]{}$ $\frac{3}{4}$ ha

Kehrwert von $\frac{5}{8}$

$\cdot\frac{8}{5}$ macht rückgängig, was $\cdot\frac{5}{8}$ bewirkt.

Deshalb können wir sagen: $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}$ bedeutet dasselbe wie $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}$.

Rechnung: $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}\cdot 5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

Ergebnis: Das Feld ist insgesamt $1\frac{1}{5}$ ha groß.

Herleitung der Divisionsregel in Schulbüchern – Var C

Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl

Eric hat zusammen mit seinen Freunden frischen Hollundersaft zubereitet. Insgesamt haben sie 6 Liter Saft erhalten. Diesen möchten sie nun in $\frac{3}{8}$ Liter Flaschen abfüllen. Um auszurechnen, wie viele Flaschen sie brauchen, messen sie, wie oft $\frac{3}{8}$ Liter in 6 Liter enthalten sind:

6 Liter : $\frac{3}{8}$ Liter = $\frac{\square}{8}$ Liter : $\frac{3}{8}$ Liter = 16, weil 48 : 3 = 16.

Sie erhalten also 16 Flaschen. Bei $\frac{48}{8} : \frac{3}{8} = 16$ spielen Achtel dieselbe Rolle wie zB cm bei 48 cm : 3 cm = 16. Man misst, wie oft **3 Achtel in 48 Achtel** enthalten sind.

Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl

Eine **natürliche Zahl** wird durch eine **Bruchzahl dividiert**, indem die **natürliche Zahl** mit dem **Nenner der Bruchzahl erweitert** wird. Anschließend werden nur **die Zähler dividiert**.
Die Division durch eine Bruchzahl ist als **Messen** aufzufassen.

$a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} : \frac{b}{c} = (a \cdot c) : b = \frac{a \cdot c}{b} \quad (b, c \neq 0)$

Perspektiven von Lehrkräften

Zwei Auszüge aus verschiedenen Interviews mit Lehrkräften:

- „Und man kann durch Zeichnen von Brüchen zum Beispiel die Addition-und-Subtraktionsregel verstehen. Man kann auch sogar durch Zeichnen von Brüchen die Multiplikationsregel verstehen. Aber ich glaube, dass bei der Division das nicht etwas sehr Anschauliches ist. So anschaulich finde ich es hier auch gar nicht.“
- „Ja, also ich meine, so bis dahin, sage ich mal, ist eigentlich alles immer relativ anschaulich. Und dann kommt die Division. Und das finde ich jetzt, also wenn man erstmal mit natürlichen Zahlen anfängt, finde ich, würde ich das jetzt auch so, sagen wir mal, jetzt zwei durch ein Halb oder so, dass man das dann irgendwie noch relativ anschaulich machen kann, wie oft passt das eine in das andere sozusagen rein. Aber sobald es um die Division von zwei Brüchen geht, hört es dann meistens mit dem Anschaulichen auf.“

Fähigkeiten von Schüler:innen

Wie lautet das Ergebnis?

a) $\frac{3}{4} : 5 =$

b) $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} =$

c) $\frac{7}{12} : \frac{5}{6} =$

d) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} =$

Erste Eindrücke aus der Erhebung bei Schüler:innen:

- In Klasse 7 beträgt die durchschnittliche Lösungshäufigkeit ca. 60 %, in der GOSt ca. 80 %.
- Am schwierigsten ist Aufgabe a), am leichtesten ist Aufgabe b).

Erkläre, wie man einen Bruch durch einen Bruch dividiert (teilt).

- Ca. 70 % können die Regel zumindest in Ansätzen tragfähig formulieren.
- Wer die Regel zumindest in Ansätzen tragfähig formuliert, löst i. d. R. auch insbesondere Aufgabe d) richtig. Die anderen Schüler:innen lösen Aufgabe d) i. d. R. falsch.

Fähigkeiten von Schüler:innen

Erste Eindrücke aus der Erhebung bei Schüler:innen:

Erfinde jeweils eine Sachsituation (Textaufgabe) zu den folgenden Aufgaben:

$\frac{5}{8} : 3 =$

$\frac{8}{9} : \frac{2}{9} =$

$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} =$

- Zu $\frac{1}{4} : \frac{2}{3} =$ wird keine tragfähige Situation beschrieben.
- Weniger als 5 % beschreiben eine tragfähige Situation zu $\frac{8}{9} : \frac{2}{9} =$
- Ca. 25 % beschreiben eine tragfähige Situation zu $\frac{5}{8} : 3 =$; allerdings ist die Leistung weder mit dem Alter noch mit dem Lösungserfolg der zuvor betrachteten Rechenaufgaben korreliert.

Mögliche Schlussfolgerungen und Vorschläge

Vorläufige Überlegungen zum Unterrichtsgang:

- „Aber sobald es um die Division von zwei Brüchen geht, hört es dann meistens mit dem Anschaulichen auf."
- Nachdem anschauliche Vorstellungen zu Brüchen sowie deren Addition, Subtraktion und Multiplikation ausgebildet sind, kann die Division direkt als Umkehrung der Multiplikation eingeführt werden.
- Mit den Rechenfertigkeiten zur Bruchdivision geht die Fähigkeit zur Formulierung der Regel einher – vermutlich im Sinne einer verbalen mentalen Stütze („Anleitung").
- Die multiplikative Inverseneigenschaft des Kehrwerts könnte betont und die Möglichkeit, fortan ohne Division auszukommen, „gefeiert" werden.

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Perspektiven

für mathematikdidaktische Forschung und Entwicklung

Mathematikdidaktik als kooperatives Vorhaben

Wenn

- Mathematikdidaktik als Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik verstanden wird,

  die Orientierungs- und Reflexionswissen für die Praxis in einem dialogischen Prozess mit der Praxis erarbeitet und zur Verfügung stellt,

dann

- ist eine institutionalisierte systematische Zusammenarbeit zwischen der Wissenschaft und der Praxis unabdingbar und unersetzlich.

→ Hierfür müssen vielerorts noch geeignete Formate gefunden werden.

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Rückfragen und Diskussion