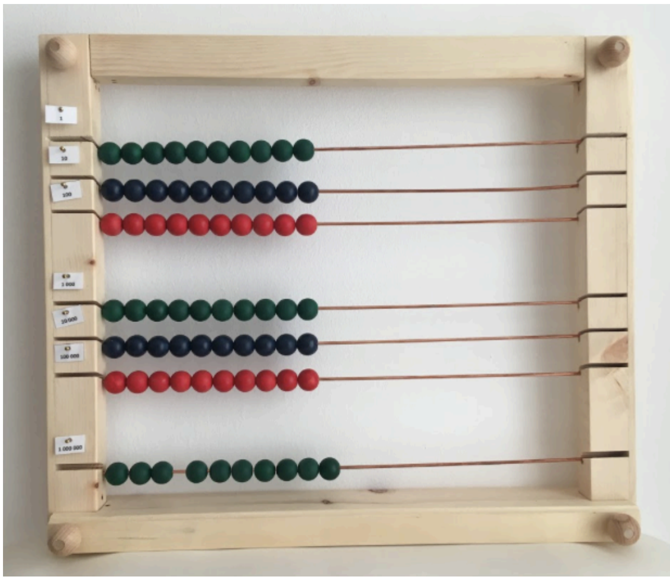
Individuelles Lernprodukt

Großer Rechenrahmen nach Maria Montessori
Konstruktion – Anleitung – Übungsbeispiele



Übung zur Vorlesung Arithmetik II

Alexandra Trabe

18PBa2

Inhaltsverzeichnis

1 Konstruktion des Rechenrahmens[1]

Der Rechenrahmen wurde in starker Anlehnung an den Rechenrahmen nach Maria Montessori konstruiert (Weinhäupl & Neuhauser, 2018, S. 111).

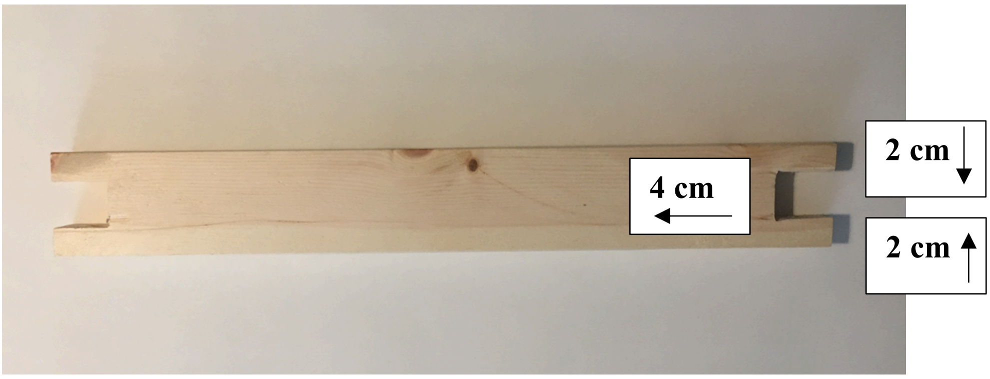
1.1 Material

- Eine Holzleiste (7 cm breit, 50 cm lang, 3 cm stark)
- Zwei Holzleisten (3 cm breit, 45 cm lang, 3 cm stark)
- Eine Holzleiste (4 cm breit, 50 cm lang, 3 cm stark)
- Zwei Holzleisten (3 cm breit, 45 cm lang, 0,5 cm stark)
- 7 Nägel
- 7 Schweißstäbe (dienen als Sprossen)
- 4 Holzstäbchen (7cm lang, Durchmesser 0,5 cm)
- 70 Holzkugeln (20 mm) mit gebohrtem Loch (4 mm) für das Rechnen im Dezimalsystem
- je nach Gebrauch weitere Holzkugeln (20 mm) mit gebohrtem Loch (4 mm) für das Rechnen in anderen Basen
- roter, blauer, grüner Farbspray
- Maßband
- Ein Blatt Papier
- Bleistift
- Bohrmaschine
- Sägen (Kreissäge, Kappsäge)
- Leim

1.2Konstruktionsschritte

Die Basis

Von der Holzleiste (7 cm breit, 50 cm lang, 3 cm stark) werden je seitlich 2 cm nach innen und 4 cm in die Holzleiste hinein abgemessen und ausgeschnitten.



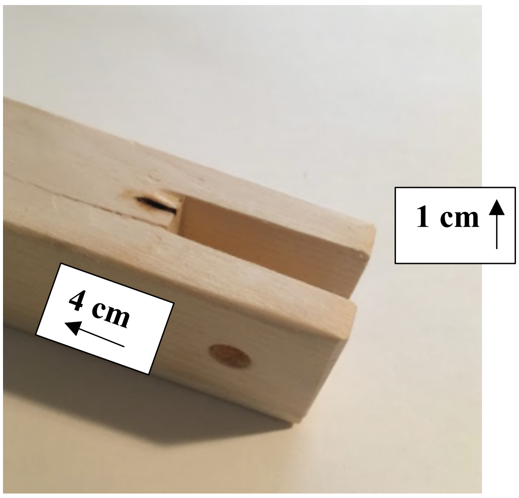
[1] Da während der Herstellung des Rechenrahmens keine Fotos gemacht wurden, sind auf den Fotos jeweils die fertigen Bestandteile des Rechenrahmens zu sehen. Davon sollte man sich beim Nachbau nicht irritieren lassen.

Die Seitenteile

Anschließend wird an den beiden Holzleisten mit den Maßen 3 cm breit, 45 cm lang und 3 cm stark weitergearbeitet. Sie stellen die Seitenteile des Rechenrahmens dar. Eine Leiste wird seitlich aufgestellt und mit einem Maßband werden mittig Markierungen auf der Höhe von 10 cm, 13 cm, 16 cm, 24 cm, 27 cm, 30 cm und 38 cm eingezeichnet.

Im Anschluss werden diese Markierungen durchbohrt. Es empfiehlt sich die Leisten beim Bohren aufeinanderzulegen, zu fixieren und gleichzeitig durchzubohren um sicherzustellen, dass die Löcher in den gleichen Abständen gebohrt werden. Zusätzlich werden auch je auf der unteren und oberen Seite mittig in einem Abstand von circa 2,5 cm vom Rand Löcher mit einem Durchmesser von 0, 6 cm gebohrt.

Weiter werden mit einer Kappsäge die Abschrägungen eingeschnitten.



Im Anschluss werden die Leisten so hingelegt, dass die Bohrungen der Löcher zu sehen sind. Auf der oberen Seite („oben“ ist, wo die drei Einschnitte näher beieinander liegen, „unten“ ist, wo ein Einschnitt „alleine“ und nicht in einer Dreierreihe liegt) werden je 1 cm nach innen und mittig 4 cm eingezeichnet. Dadurch entsteht ein Rechteck, das mit der Kreissäge ausgeschnitten wird.
Nun werden die zwei dünnen Holzleisten (3 cm breit, 45 cm lang, 0,5 cm stark) auf je eine der Außenseiten der beiden Seitenteile geleimt.

Auf einem Seitenteil werden im Abstand von 2,5 cm der Abschrägung kleine Nägel so eingeschlagen, dass sie noch aus dem Holz „herausschauen“.

Die Oberleiste

Die Holzleiste (4 cm breit, 50 cm lang, 3 cm stark) wird zur Oberleiste des Rechenrahmens. Damit sie später in die Seitenleisten eingesteckt werden kann, werden je am Ende auf beiden Seiten 1 cm nach innen und mittig 4 cm hinein abgemessen.

Die eingezeichneten Seitenteile werden mit einer Kreissäge ausgeschnitten. Anschließend werden auch in beide Endseiten dieser Leiste Löcher gebohrt. Damit die Löcher mit den Seitenteilen übereinstimmen, empfiehlt es sich die Oberleiste in die Seitenleisten zu stecken und durch das Loch, das bereits in den Seitenleisten vorhanden ist, erneut durchzubohren.

Zusammensetzen der Einzelteile

Auf die vier Holzstäbchen wird je eine Holzkugel an ein Ende des Stäbchens geleimt.

Nun kann der Rahmen zusammengesteckt werden. Um mehr Stabilität zu erlangen, werden die Holzstäbchen durch die Löcher gesteckt.

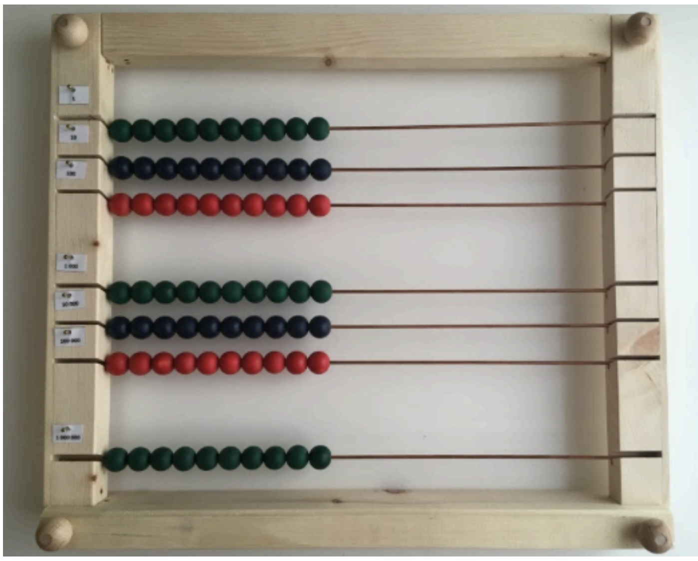
oben

unten

Für das Rechnen im Dezimalsystem können die Holzkugeln mit dem Farbspray besprüht werden. Es werden 30 Kugeln mit grünem, 20 Kugeln mit blauem und 20 Kugeln mit rotem Spray besprüht.

Ebenso werden für das Rechnen im Dezimalsystem die einzelnen Sprossen beschriftet. Auf einem Blatt Papier werden 7 kleine Kärtchen mit den Maßen 2,5 cm x 2 cm ausgeschnitten. Darauf wird 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 und 1 000 000 geschrieben. Sie werden durchlöchert und auf die Nägel gehängt. Dabei wird das Kärtchen mit der 1 auf die oberste Sprosse (die oberste Sprosse ist jene, wo drei Sprossen nahe beieinander sind, die unterste Sprosse ist jene die „alleine" steht[2]) , das Kärtchen mit der 10 auf die zweitoberste Sprosse usw. gehängt. Für das Rechnen in anderen Basen können entsprechende Beschreibungen der Sprossen erstellt werden.

Nun können die Sprossen eingehängt werden. Dazu werden zunächst – entsprechend der Basis, in der gerechnet werden soll – die Kugeln auf die Sprossen aufgefädelt und anschließend in den Rahmen eingehängt.



[2] Der Abstand der Sprossen veranschaulicht die 3-er Bündelung des Dezimalsystems. Für das Rechnen in anderen Basen ist der Abstand zwischen den ersten drei und den zweiten drei Sprossen sowie der Abstand zwischen den zweiten drei und der letzten Sprosse nicht relevant.

2 Aufbau des Rechenrahmens

Der Rechenrahmen besteht aus Einzelteilen, die vor Gebrauch zusammengesetzt werden müssen. Dazu werden die zwei Standleisten mit den Einkerbungen in die Bodenleiste rechts und links hineingestellt und mit zwei kleinen Holzstäbchen auf beiden Seiten fixiert. Eine weitere Holzleiste verbindet die beiden Standleisten, welche ebenfalls durch zwei Holzstäbchen stabilisiert wird. Markierungen zeigen an, wie die Leisten zusammengesteckt werden sollen.
Für das Rechnen im Dezimalsystem gilt: Pro Sprosse werden 10 Holzkugeln aufgefädelt. Die Einer, Eintausender und Millionen sind grün, die Zehner und Zehntausender blau und die Hunderter und Hunderttausender sind rot. Die Sprossen werden in den Rahmen eingelegt.
Soll mit dem Rechenrahmen in anderen Basen gerechnet werden, so werden auf den einzelnen Sprossen, die Kugeln entsprechend der verwendeten Basis aufgefädelt. So werden z.B. für das Rechnen in der Basis⑥ pro Sprosse sechs Kugeln aufgefädelt.

Alle Holzkugeln werden jeweils auf die linke Seite[3] geschoben. An den Nägeln werden die Stellenwerttäfelchen angebracht (1 zu den Einern, 10 zu den Zehnern, 100 zu den Hundertern usw.) (Weinhäupl & Neuhauser, 2018, S. 111). Der Rechenrahmen kann je nach Belieben stehend oder liegend verwendet werden (Montessori Lernwelten, 2018a).

2. 1 Einführung des Rechenrahmens

Der Rechenrahmen eignet sich zur Hinführung der schriftlichen Rechenverfahren. Da er im Vergleich zu anderem Material, z.B. zum Markenspiel oder zu dem Goldenen Perlenmaterial, eine höhere Abstraktionsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler erfordert, ist eine allgemeine Einführung des Rechenrahmens unabdingbar für dessen korrekte Anwendung (Weinhäupl & Neuhauser, 2018, S. 106).

2.2Kennenlernen des Rechenrahmens

Die Lehrperson stellt den Schülerinnen und Schülern den Rechenrahmen vor, indem sie ihnen die Bedeutung der einzelnen Kugeln und Sprossen erklärt. Sie schiebt eine Kugel der Einersprosse von links nach rechts und sagt: „Das ist ein Einer. Das bedeutet Eins."

[3] Die Kugeln können auch alle auf die rechte Seite geschoben werden. Es spielt eigentlich keine Rolle, welche Seite die Ausgangsposition der Kugeln ist und ob von links nach rechts oder von rechts nach links gearbeitet wird. Wichtig ist dabei nur, dass die selbstbestimmte Arbeitsrichtung eingehalten wird.

Anschließend schiebt sie eine Kugel der Zehnersprosse von links nach rechts und sagt: „Das ist ein Zehner. Das bedeutet Zehn.“ In dieser Form werden alle Sprossen vorgeführt.
Weiteres erklärt die Lehrperson, wie mithilfe des Rechenrahmens getauscht werden kann. Dazu zählt sie gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern alle Kugeln der Einersprosse und schiebt sie dabei nacheinander von links nach rechts („Eins... Zwei... Drei...“ usw.). Wurden alle zehn Kugeln nach rechts geschoben, schiebt die Lehrperson die zehn Kugeln wieder nach links und gleichzeitig schiebt sie eine Kugel der Zehnersprosse nach rechts. Sie sagt dabei: „Ich tausche zehn Einer gegen einen Zehner/Für zehn Einer, einen Zehner.“ Das Zählen wird für die restlichen Sprossen so weitergeführt (Weinhäupl & Neuhauser, 2018, S. 111).
Entscheidend ist, dass die Lehrperson erklärt, dass wann immer zehn Kugeln einer Sprosse auf die „Rechenseite“ geschoben wurden (ist die Ausgangsstellung, dass alle Kugeln auf der linken Seite des Rechenrahmens sind, dann wäre die rechte Seite die Rechenseite), getauscht werden muss.

2.3 Einstellen und Ablesen der Zahlen

Die Lehrperson gibt eine Zahl vor, z.B. die Zahl 4 283 587. Diese Zahl wird unterstützend mit dem Zahlenset aufgelegt. Anschließend soll sie auf dem Rechenrahmen eingestellt werden. Dabei wird wie folgt vorgegangen[4]: Es wird zunächst der Reihe nach geschaut, wie viele Einheiten pro Stellenwert vorliegen und mitgesprochen: „Ich habe vier Millionen.“ Dann werden vier Kugeln der Millionensprosse nach rechts verschoben. Dann wird der nächste Stellenwert, der Hunderttausender, angeschaut. „Ich habe zwei Hunderttausender.“ Es werden zwei Kugeln Hunderttausendersprosse nach rechts verschoben. So wird für alle Stellenwerte der gelegten Zahl vorgegangen. Ist die Zahl am Rechenrahmen eingestellt, so wird sie vom Rechenrahmen abgelesen (Montessori Lernwelten, 2018a; Weinhäupl & Neuhauser, 2018, S. 111). Die Lehrperson kann beim Aussprechen der Zahl unterstützend die Sprechrichtung am Rechenrahmen mitzeigen, um auf die inverse Sprechweise der Einer und Zehner hinzuweisen (Montessori Lernwelten, 2018a).

[4] Auch hier spielt es keine Rolle ob, man bei der Darstellung am Rechenrahmen mit dem größten oder dem kleinsten Stellenwert beginnt (Montessori Lernwelten, 2018a).

3 Rechnen mit dem Rechenrahmen

Im folgenden werden Beispiele für Additions-, Subtraktions- und Multiplikationsaufgaben beschrieben. Divisionsaufgaben sind mit den Rechenrahmen ebenso eingeschränkt möglich, werden aber in dieser Anleitung nicht beschrieben, da sie eine sehr hohe Merkleistung erfordern und die Ergebnisse sich nicht so deutlich vom Rechenrahmen ablesen lassen.
Für das Rechnen im Dezimalsystem gilt, dass mit dem Rechenrahmen alle Rechnungen bis max. zur Zahl 9 999 999 durchgeführt werden können (Weinhäupl & Neuhauser, 2018, S. 111). Rechnungen in anderen Basen sind nur eingeschränkt möglich! Dies liegt daran, dass der Rechenrahmen nur über sieben Sprossen verfügt und daher nur mit Zahlen mit maximal sieben Stellenwerten gerechnet werden kann. Dies gilt es bei der Auswahl der Aufgaben zu berücksichtigen.
Im Folgenden werden die Additions-, Subtraktions- und Multiplikationsaufgaben anhand von Beispielen des Dezimalsystems veranschaulicht. Die Rechenweise in anderen Basen erfolgt analog.

3.1 Addition ohne Überschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe $\begin{array}{r} 73\,454 \\ +\,24\,435 \end{array}$.
Dazu wird zunächst die Zahl 73 454 am Zahlenstrahl eingestellt, indem die entsprechenden Holzkugeln auf die rechte Seite geschoben werden. Anschließend soll die Zahl 24 435 addiert werden. Es wird bei den Einern begonnen. Zu den vier Einerkugeln werden fünf Einerkugeln dazu geschoben. Als nächstes sind die Zehner an der Reihe. Zu den fünf Zehnerkugeln auf der rechten Seite werden drei Kugeln dazugegeben. Weiteres werden vier Hunderterkugeln, vier Eintausenderkugeln und zwei Zehntausenderkugeln nach rechts geschoben. Nun kann das Ergebnis vom Rechenrahmen abgelesen werden. Es lautet 97 889 (Montessori Lernwelten, 2018a).

3.2 Addition mit Überschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe $\begin{array}{r} 76\,767 \\ +\,20\,554 \end{array}$.
Dazu wird zunächst die Zahl 76 767 am Zahlenstrahl eingestellt, indem die entsprechenden Holzkugeln auf die rechte Seite geschoben werden. Anschließend soll die Zahl 20 554 addiert werden. Es wird bei den Einern begonnen. Zu den sieben Einern auf der rechten Seite sollen

vier weitere Einer dazugegeben werden. Es sind aber nur drei Einer übrig. Diese drei Einer werden auf die rechte Seite geschoben. Es fehlt aber noch ein Einer. Um diesen Einer zu erhalten, muss getauscht werden. Zehn Einer ergeben einen Zehner. Also werden die zehn Einer von rechts nach links und gleichzeitig ein Zehner von links nach rechts geschoben. Auf der Einersprosse sind nun alle zehn Einer auf der linken Seite und auf der Zehnersprosse sind drei Zehner auf der linken und sieben Zehner auf der rechten Seite. Nun kann der „fehlende“ Einer nach rechts geschoben werden. Damit wurden insgesamt vier Einer von rechts nach links geschoben. Dann geht es weiter mit den Zehnern. Zu den sieben Zehnern sollen fünf Zehner dazugeben werden. Es sind aber nur drei Zehner auf der linken Seite übrig. Also muss wieder getauscht werden. Dazu werden zunächst die drei Zehner auf die rechte Seite geschoben. Anschließend werden gleichzeitig alle zehn Zehner von rechts nach links und ein Hunderter von links nach rechts geschoben. Nun können zwei weitere Zehner nach rechts geschoben werden. Als nächstes werden die Hunderter addiert. Zu den acht Hundertern sollen fünf Hunderter dazugegeben werden. Es sind aber nur zwei Hunderter auf der linken Seite übrig, also muss wieder getauscht werden. Gleichzeitig werden die zehn Hunderter nach links und ein Eintausender nach rechts geschoben. Die fehlenden drei Hunderter können nun nach rechts geschoben werden. Zu den sieben Eintausender sollen null Eintausender addiert werden. Es wird also keine Kugel auf der Eintausendersprosse von links nach rechts verschoben. Als letztes werden die Zehntausender addiert. Zu den sieben Zehntausendern auf der rechten Seite, können zwei Zehntausender von der linken Seite dazu geschoben werden. Das Ergebnis kann nun vom Rechenrahmen abgelesen werden. Es lautet 97 321 (Montessori Lernwelten, 2018a).

3.3Subtraktion ohne Unterschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe $\begin{array}{r} 96\,069 \\ -\ \ 6\,038 \end{array}$. Dazu wird zunächst die größere Zahl, nämlich 96 069 am Zahlenstrahl eingestellt, indem die entsprechenden Holzkugeln auf die rechte Seite geschoben werden. Anschließend soll die Zahl 6 038 abgezogen werden. Es wird mit den Einern begonnen. Von neun Einern sollen acht Einer abgezogen werden. Dies geschieht indem von den neun Einern auf der rechten Seite acht Einer auf die linke Seite geschoben werden. Als nächstes werden von den sechs Zehnern auf der rechten Seite drei Zehner auf die linke Seite geschoben. Die rechte Seite der Hundertersprosse ist leer und es werden auch keine Hunderter abgezogen. Als letztes werden die Eintausender abgezogen. Es befinden sich auf der Eintausendersprosse sechs Kugeln auf der rechten Seite und sechs Kugeln sollen abgezogen werden. Daher werden die sechs Kugeln auf die linke Seite geschoben. Die rechte Seite der Eintausendersprosse ist nun leer. Von den Zehntausendern wird nichts abgezogen. Nun kann das Ergebnis abgelesen werden. Es lautet 90 031 (Montessori Lernwelten, 2018a).

3.4Subtraktion mit Unterschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe $\begin{array}{r} 82\,342 \\ -\ 16\,452 \end{array}$. Dazu wird zunächst die größere Zahl, nämlich 82 342 am Zahlenstrahl eingestellt, indem die entsprechenden Holzkugeln auf die rechte Seite geschoben werden. Es wird bei den Einern begonnen. Von zwei Einern sollen zwei Einer abgezogen werden. Dazu werden von den Einern auf der rechten Seite der Sprosse, zwei Einer auf die linke Seite geschoben. Es bleiben auf der rechten Seite der Einersprosse keine Kugeln mehr übrig. Bei den Zehnern sollen fünf Zehner von vier Zehnern abgezogen werden. Es können zunächst nur vier Zehner abgezogen, also nach links geschoben werden. Um den letzten Zehner auch abziehen zu können muss getauscht werden. Dazu werden gleichzeitig alle Zehnerkugeln nach rechts und eine Hunderterkugel nach links geschoben. Nun kann von den Zehnern ein weiterer Zehner abgezogen werden. Weiter geht es mit den Hundertern. Von den zwei Hundertern auf der rechten Seite sollen vier Hunderter abgezogen werden. Auch in diesem Fall muss wieder getauscht werden. Es werden zunächst die zwei Hunderter von rechts nach links geschoben. Dann werden gleichzeitig alle zehn Hunderterkugeln nach rechts und eine Eintausenderkugel nach links geschoben. Nun können die zwei fehlenden Hunderterkugeln auch noch nach links geschoben werden. Im nächsten Schritt sollen von der einen Eintausenderkugel sechs Eintausender abgezogen werden. Auch hier kann zunächst nur ein Eintausender abgezogen werden und die restlichen fünf können erst nach dem Tausch von den zehn Eintausendern gegen einen Hunderttausender abgezogen werden. Als letztes wird von den sieben Hunderttausender noch ein Hunderttausender weggenommen, also von rechts nach links geschoben. Nun kann das Ergebnis abgelesen werden. Es lautet 65 890 (Montessori Lernwelten, 2018a).

3.5Multiplikation mit einstelligen Faktor ohne Überschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe $2\,321 \cdot 3$. Alle Holzkugeln befinden sich auf der linken Seite. Zur Lösung der Aufgabe wird jeder Stellenwert mit drei multipliziert. Es wird bei den Einern begonnen. Drei Einer mal einen

Einer (3·1) wird am Rechenrahmen gelöst, indem das Ergebnis, also drei Kugeln, von links nach rechts geschoben werden. Als Nächstes werden die Zehner multipliziert. Auch hier wird das Ergebnis von 3·2, also sechs, von links nach rechts geschoben. So geht man auch bei den Hundertern (3·3, also neun Kugeln) und den Eintausender (3·2, also sechs Kugeln) vor. Das Ergebnis kann anschließend abgelesen werden. Es lautet 6 963 (Montessori Lernwelten, 2018b).

3.6Multiplikation mit zweistelligen Faktor ohne Überschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe 2 321 · 30 . Alle Holzkugeln befinden sich auf der linken Seite. Es wird mit den Einern des Multiplikanden begonnen, also in diesem Fall mit Null. Null mal den Einern, Zehnern, Hundertern und Eintausendern ergibt Null. Es werden also keine Kugeln verschoben. Nun geht es weiter mit der zweiten Stelle des Multiplikanden, nämlich mit den drei Zehnern. Diese drei Zehner werden nun auch mit allen Stellen des Multiplikators multipliziert. Es wird wieder mit den Einern des Multiplikators begonnen. Werden Einer mit Zehnern multipliziert so ergibt dies Zehner. Also rechnet man die drei Zehner mal den einen Einer und erhält dabei drei Zehner. Es werden also drei Kugeln auf der Zehnersprosse von links nach rechts geschoben. Weiter geht es mit der Zehnerstelle des Multiplikators. Werden Zehner mit Zehnern multipliziert, so erhält man Hunderter. Daher ergibt drei Zehner mal zwei Zehner sechs Hunderter. Es werden sechs Kugeln auf der Hundertersprosse von links nach rechts geschoben. Anschließend wird mit der Hunderterstelle des Multiplikators weiter gerechnet. Werden Hunderter mit Zehnern multipliziert erhält man Eintausender. Folglich ist das Ergebnis aus drei Hundertern mal drei Zehnern neun Eintausender. Also werden neun Eintausenderkugeln von links nach rechts geschoben. Als letztes wird die Eintausenderstelle des Multiplikators mit drei Zehnern multipliziert. Werden Eintausender mit Zehnern multipliziert so erhält man Zehntausender. Also ergeben zwei Eintausender mal drei Zehner sechs Zehntausender. Es werden sechs Kugeln auf der Zehntausendersprosse von links nach rechts geschoben. Das Ergebnis kann abgelesen werden. Es lautet 69 630.
Ein weiteres Beispiel wird gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern gerechnet, damit sie sehen, was passiert, wenn der Einer bei einem zweistelligen Multiplikanden nicht Null ist. Die Aufgabe lautet 1 202 · 21. Alle Holzkugeln befinden sich auf der linken Seite. Es wird bei den Einern begonnen. Es wird ein Einer mal zwei Einer gerechnet. Dies ergibt zwei Einer. Es werden zwei Einerkugeln von links nach rechts geschoben. Weiter geht es mit einem Einer

mal Null Zehner. Dies ergibt Null und es wird nichts verschoben. Als nächstes wird ein Einer mal zwei Hunderter gerechnet. Dies ergibt zwei Hunderter. Es werden zwei Hunderterkugeln nach rechts verschoben. Nun wird noch ein Einer mit einem Eintausender gerechnet. Dies ergibt einen Eintausender. Daher wird eine Eintausenderkugel nach rechts verschoben. Im nächsten Schritt wird mit den Zehnern des Multiplikanden gerechnet. Zwei Zehner mal Zwei Einer ergeben vier Zehner. Es werden vier Zehnerkugeln nach rechts geschoben. Zwei Zehner mal Null Zehner ergibt null, es wird also nichts verschoben. Dann werden zwei Zehner mal zwei Hunderter gerechnet. Dies ergibt vier Eintausender. Es werden vier Eintausender nach rechts verschoben. Als letztes werden noch zwei Zehner mal einen Eintausender gerechnet. Dies ergibt zwei Zehntausender. Es werden zwei Zehntausenderkugeln nach rechts verschoben. Das Endergebnis kann nun abgelesen werden. Es lautet 25 242 (Montessori Lernwelten, 2018b).

3.7Multiplikation mit einstelligem Faktor mit Überschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe $4\,643 \cdot 2$. Alle Holzkugeln befinden sich auf der linken Seite. Zur Lösung der Aufgabe wird jeder Stellenwert mit zwei multipliziert. Es wird bei den Einern begonnen. Zwei Einer mal drei Einer ergibt sechs Einer. Es werden sechs Kugeln auf der Einersprosse von links nach rechts verschoben. Dann werden zwei Einer mit vier Zehnern multipliziert. Dies ergibt acht Zehner. Es werden acht Kugeln von der linken zur rechten Sprossenseite geschoben. Weiter geht es mit Zwei Einer mal sechs Hunderter. Dies ergibt 12 Hunderter, da es keine 12 Kugeln zum Verschieben gibt, muss hier getauscht werden. Es werden zunächst einmal alle zehn Hunderter nach rechts geschoben. Gleichzeitig werden die zehn Hunderter wieder nach links und ein Eintausender nach rechts geschoben. Da das Ergebnis 12 Hunderter ist und zuvor nur zehn Hunderter nach rechts geschoben wurden, müssen jetzt weitere zwei Hunderter nach links geschoben werden, umso insgesamt auf die 12 Hunderter zu kommen. Nun sind die Eintausender an der Reihe. Zwei Einer mal vier Eintausender ergibt acht Eintausender. Es werden acht Eintausender von links nach rechts geschoben. Das Ergebnis kann nun abgelesen werden. Es lautet 9 286 (Montessori Lernwelten, 2018b).

3.8Multiplikation mit zweistelligem Faktor mit Überschreitung

Die Lehrperson löst gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe 34 815 · 20. Alle Holzkugeln befinden sich auf der linken Seite. Es wird bei der Einerstelle des Multiplikanden, also mit Null begonnen. Da jede Multiplikation mit Null Null ergibt, wird nichts verschoben. Weiter geht es mit der Zehnerstelle des Multiplikanden, mit den zwei Zehnern. Zwei Zehner mal fünf Einer ergeben zehn Zehner. Es werden zehn Zehner von links nach rechts geschoben. Da auf dieser Sprosse der Zehner voll ist, muss getauscht werden. Es werden zehn Zehner gegen einen Hunderter getauscht. Also werden alle Zehnerkugeln wieder nach links und gleichzeitig eine Hunderterkugel nach rechts geschoben. Nun werden die zwei Zehner mit dem einen Hunderter multipliziert. Dies ergibt zwei Hunderter. Es werden zwei Kugeln der Hundertersprosse nach rechts geschoben. Weiter geht es, indem die zwei Zehner mit den acht Hundertern multipliziert werden. Dies ergibt 16 Eintausender. Es werden zunächst zehn Eintausender nach rechts geschoben. Dann muss getauscht werden. Gleichzeitig werden die zehn Eintausender wieder nach links und ein Zehntausender nach rechts geschoben. Im nächsten Schritt werden die restlichen sechs Eintausender nach rechts geschoben. Nun werden die zwei Zehner mit den vier Eintausendern multipliziert. Dies ergibt acht Zehntausender. Es werden acht Kugeln der Zehntausendersprosse nach rechts geschoben. Als letztes werden die zwei Zehner mit den drei Zehntausendern multipliziert. Dies ergibt sechs Hunderttausender. Es werden sechs Hundertausenderkugeln nach rechts geschoben. Das Ergebnis kann nun abgelesen werden. Es lautet 696 300.
Ein weiteres Beispiel wird gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern gerechnet, damit sie sehen, was passiert, wenn der Einer bei einem zweistelligen Multiplikanden nicht Null ist. Die Aufgabe lautet 7 385 · 35. Alle Holzkugeln befinden sich auf der linken Seite. Es wird bei den Einern begonnen. Es werden fünf Einer mit fünf Einern multipliziert. Dies ergibt 25 Einer bzw. zwei Zehner und fünf Einer. Es werden also zwei Zehnerkugeln und fünf Einerkugeln von links nach rechts geschoben. Nun werden fünf Einer mal acht Zehner gerechnet. Das Ergebnis ist 400. Es werden vier Hunderter von links nach rechts geschoben. Nun werden fünf Einer mal drei Hunderter gerechnet. Dies ergibt 1 500. Es werden also ein Eintausender und fünf Hunderter nach links verschoben. Dann werden fünf Einer mal sieben Eintausender gerechnet. Daraus resultieren 35 000. Es werden drei Zehntausender und fünf Eintausender nach links verschoben. Nun geht es bei der Zehnerstelle des Multiplikanden weiter. Es werden drei Zehner mal fünf Einer gerechnet. Dies ergibt 150. Es werden also eine Hunderterkugel und fünf Zehnerkugeln nach links verschoben. Nun sind alle Hunderterkugeln

auf der rechten Seite, was bedeutet, dass getauscht werden muss. Es werden also gleichzeitig die zehn Hunderterkugeln nach links und eine Eintausenderkugel nach rechts geschoben. Anschließend werden drei Zehner mal acht Zehner gerechnet. Dies ergibt 2 400. Es werden also zwei Eintausenderkugeln und vier Hunderterkugeln nach links verschoben. Dann werden drei Zehner mal drei Hunderter gerechnet. Das Ergebnis ist 9 000. Es müssen neun Eintausender nach links verschoben werden. Es ist aber auf der linken Seite nur ein Eintausender übrig. Dieser wird zunächst einmal nach recht geschoben. Dann werden die zehn Eintausender in einen Zehntausender getauscht (gleichzeitiges Verschieben der zehn Eintausender nach links und eines Zehntausenders nach rechts), so können anschließend die restlichen acht Eintausender nach rechts geschoben werden. Weiter geht es mit der Rechnung drei Zehner mal sieben Eintausender. Dies ergibt 210 000. Es werden zwei Hunderttausender und ein Zehntausender nach rechts verschoben. Das Endergebnis kann nun abgelesen werden. Es lautet 258 475 (Montessori Lernwelten, 2018b).

4 Übungsbeispiele

Die Übungsbeispiele enthalten Additions-, Subtraktions- und Multiplikationsaufgaben mit und ohne Überschreitung sowohl fürs Dezimalsystem als auch für andere Basen. Die Aufgaben sind bereits in einem Format verfasst, dass sie zum Einsetzen in der Praxis nur mehr ausgedruckt werden müssen. Die Tabellen sollten jeweils doppelseitig bedruckt werden, denn dann stimmen die Aufgaben mit den Lösungen überein. Daher entspricht immer die Lösung der ersten Aufgabe (erste Tabelle - erste Spalte - erste Zeile) der Zahl in der zweiten Tabelle – erste Zeile – dritte Spalte. Die Übungsbeispiele stammen zum Teil aus Padberg & Büchter (2015) und wurden teilweise selbstständig überlegt.

73 454 + 24 435 ohne Ü	76 767 + 20 554 mit Ü	96 069 - 6 038 ohne Ü
82 342 - 16 452 mit Ü	495 738 + 507 896 mit Ü	1 576 438 - 999 999 mit Ü
42 422 · 2 ohne Ü	38 976 · 36 mit Ü	100 023 · 3 ohne Ü
71 438 · 95 mit Ü	87 932 · 44 mit Ü	26 549 · 83 mit Ü

90 031	97 321	97 889
576 439	1 003 634	65 890
300 069	1 403 136	84 844
2 203 567	3 869 008	6 786 610

1010④ - 212④ mit Ü	423⑤ - 234⑤ mit Ü	132④ + 212④ mit Ü
14031⑤ + 21041⑤ mit Ü	313④ - 132④ mit Ü	12310⑥ + 33245⑥ ohne Ü
134105⑨ - 652783⑨ ohne Ü	32④· 3④ mit Ü	332④ · 23④ mit Ü
123⑤· 234⑤ mit Ü	1022⑧· 3⑧ ohne Ü	202③· 12③ mit Ü

1010④	134⑤	132④
45555⑥	121④	40122⑤
22222④	222④	786888⑨
10201③	3066⑧	40442④

5 Stationenbetrieb mit Studierenden

Im Folgendem wird eine mögliche Aufgabenstellung für das Rechnen mit dem Rechenrahmen für Studierende dargestellt.

Rechnen mit dem Rechenrahmen – Addition, Subtraktion und Multiplikation

Versuche zunächst Aufgaben im Dezimalzahlensystem zu lösen. Anschließend kannst du auch probieren, Rechenaufgaben in einem anderen Stellenwertsystem zu lösen. Tausche in diesem Fall die Kugeln entsprechend dem jeweiligen Stellenwertsystem aus!

Du kannst dazu entweder die vorgefertigten Aufgabenkärtchen verwenden oder dir neue Aufgaben überlegen. Besonders das Überlegen neuer Aufgaben in einem anderen Zahlensystem kann sehr knifflig sein, da man nicht so schnell nachrechnen kann, ob das Ergebnis stimmt oder nicht. In diesem Fall empfiehlt sich eine Partnerarbeit. Dann kannst du dich mit einem Partner/einer Partnerin austauschen.

Überlege dir beim Rechnen in anderen Basen, welche Aufgaben nicht mit dem Rechenrahmen lösbar sind und begründe deine Antwort.

6 Literaturverzeichnis

Montessori Lernwelten (2018a). *Anleitung Addition/Subtraktion mit dem großen Rechenrahmen.* Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=6HqF4onuvs4&frags=pl%2Cwn [10.06.2019].

Montessori Lernwelten (2018b). *Anleitung zur Multiplikation mit dem großen Rechenrahmen.* Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=gFVBzZzatAw&frags=pl%2Cwn [10.06.2019].

Padberg, F., & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik* (2. Auflage). Berlin: Springer-Verlag.

Weinhäupl, W., & Neuhauser, M. (2018). *Montessori einfach klar. Handreichung für die Arbeit mit Montessori-Materialien. Mathematik.* Salzburg: Dr. Wilhelm Weinhäupl.